Apostes en jocs d'atzar

Pseudònim: "Pascal"

Abstract

Este trabajo trata el tema de las apuestas, y intenta demostrar la posibilidad de hacer ganancias en un juego de casino o en una lotería del Estado. Todo esto se trata desde un punto de vista matemático, definiendo valores que cuantifiquen los beneficios y la probabilidad de ganarlos. Una vez realizados los análisis, se utilizan programas informáticos para corroborar de forma estadística los resultados. Finalmente se concluye que el requisito necesario para poder obtener beneficios es que la esperanza matemática sea positiva, y que los beneficios que se puedan ganar vendrán con una condición: al jugar a juegos de azar siempre nos arriesgamos a perder todo el capital disponible, pero con mayor paciencia esa probabilidad de perderlo todo disminuye.

This work deals with the gambles, and it tries to prove if it's possible to make profit of a casino's game or a lottery. It uses mathematical tools, as self-defined values which may quantify the profits and the probability of getting them. Once the analyses are done, programs are used to verify the results. Finally it concludes explaining that, if we want to make money from a casino, our mathematical expectation must be positive, and that the benefits will come with a condition: when we play gambling games, whatever the case is, it's always possible for us to loose everything, and the probability of happening that increases while our patience decreases.

Agraïments

M'agradaria donar les gràcies a totes aquelles persones que d'una forma o una altra han fet que sigui possible el desenvolupament d'aquest treball.

En primer lloc dedico aquestes paraules al meu pare, qui m'ha ensenyat gairebé tot el que sé de matemàtiques. També agraeixo a ma mare, per la seva paciència i interès en el treball i la seva revisió constant.

Una altra persona gràcies a qui he pogut completar aquesta feina és el meu tutor, qui m'ha sabut aconsellar i guiar correctament.

I per últim, però no per això menys important, estic en deute amb totes aquelles persones qui m'han animat, sent els primers els meus germans, seguits dels meus companys i amics després, i finalment al meu avi, a qui poques persones han guanyat a les cartes.

ÍNDEX

Capítol 1. Introducció

1.1. Delimitació i justificació del tema ……………………………...1

1.2. Hipòtesis del treball ……………………………………………. 2

1.3. Objectius …………………………………………………………2

1.4. Estructuració del treball ……………………………………….. 2

Capítol 2. Probabilitat

2.1. Definició clàssica del terme probabilitat ……………………... 3

2.2. Definició axiomàtica de la probabilitat ……………………….. 4

2.3. Comparació de la definició clàssica i la definició axiomàtica … 4

Capítol 3. Esperança matemàtica

3.1. Definició tradicional d'esperança matemàtica …………………. 6

3.2. Propietats de l'esperança matemàtica …………………………. 7

Capítol 4. La Primitiva

4.1. Sobre la Primitiva …………………………………………………8

4.2. Probabilitat per categoria …………………………………………9

4.3. Premi mitjà per categoria ………………………………………… 11

4.4. La Primitiva com a font de beneficis ……………………………. 12

4.5. Conclusions dels resultats teòrics ………………………………. 14

4.6. Comprovació de les conclusions de la primitiva ………………. 15

4.7. Conclusions dels resultats estadístics …………………………..16

Capítol 5. La ruleta

5.1. Sobre la ruleta ………………………………………………….. 17

5.2. Les ruletes com a eines imperfectes …………………………… 18

5.3. Modelització de l'aposta constant ………………………………. 19

5.4. Sobre els valors coherents de la variable *B* …………………… 24

5.5. Demostració de que només existeix un valor de *B* coherent … 25

5.6. La probabilitat de guanyar il·limitadament ………………………27

5.7. Càlcul del capital necessari per guanyar il·limitadament ……...29

5.8. Conclusions dels resultats teòrics ………………………………. 31

5.9. Comprovació estadística de les conclusions teòriques ………. 32

5.10. Conclusions dels resultats estadístics …………………………38

Capítol 6. La Martingala

6.1. Sobre la Martingala ……………………………………………..39

6.2. Probabilitat d'obtenir un nombre de guanys a partir del capital inicial …………………………………………………………….. 40

6.3. Probabilitat de guanyar il·limitadament ………………………….42

6.4. Demostració de la necessitat d'esperança positiva …………... 43

6.5. Demostració que amb esperança positiva la probabilitat de guanyar il·limitadament no és nul·la ..…………………………………………...47

6.5.1. Demostració que g(k) és monòtona creixent en l'interval $(1,\infty)$ ………………………………………………………….. 48

6.5.2. Recerca d'una cota inferior ……………………………. 49

6.6. Conclusions dels resultats teòrics ………………………………. 52

6.7. Comprovació estadística de l'estratègia de la Martingala ……. 53

6.8. Conclusions dels resultats estadístics …………………………..58

Capítol 7. Comparació de les estratègies de l'aposta constant i la Martingala ……………………………………………………………… 59

Capítol 8. Conclusions

8.1. Conclusions del treball ……………………………………….....61

8.2 Conclusions personals ………………………………………......61

Capítol 9. Fonts d'informació ………………………………………………... 63

Annexos

Sobre les dades de la primitiva ………………………………………. 64

Casos en que el capital acumulat és nul ……………………..64

Casos en que el capital acumulat és molt gran …….………. 67

Full d'excel que tracta les dades de la primitiva …….……… 67

Sobre el programa utilitzat en l'apartat de la ruleta ………..……..70

Sobre el programa utilitzat en l'apartat de la Martingala …….…….. 74

Guia de les variables fetes servir al llarg del treball………………… 78

Memòria del treball ……………………………………..…………… 82

1. Introducció

1.1. Delimitació i justificació del tema

El tema d’aquest treball és l’estudi de les apostes en els jocs d’atzar. Vaig triar aquest tema perquè, des de petit, sempre m’han agradat els jocs on l’atzar hi intervenia. Cada vegada que he jugat a un joc, sigui les cartes, els parxís o d’altres, m’he preguntat si estava el raonament realment fora de lloc.

Realment sembla que no hi ha espai per les idees quan es juga amb l’atzar, però l’experiència mostra el contrari. En els jocs de cartes hi ha una regla bàsica, i és que totes les cartes només poden aparèixer una sola vegada. Així, memoritzar les cartes que anaven sortint era una primera estratègia que en alguns casos podia arribar a marcar la victòria. Tot i que de totes formes mai he tingut el cor de provar-ho, el simple fet que ja existeixi una estratègia que impliqui un augment de les probabilitats de guanyar ja suscita preguntes interessants, com per exemple, la recerca d’una estratègia que permetés guanyar sempre.

De fet, aquesta curiositat va arribar a un punt en que, conjuntament amb un bon amic meu, vam començar a definir termes abstractes, tal com l’esperança matemàtica (a la qual anomenàvem “la mitjana dels resultats”) i la probabilitat, i els vam posar en pràctica en jocs que mesclaven estratègia i atzar, com és el conegut Risk.

D’aquesta manera he volgut consolidar els coneixements que ja havia desenvolupat de forma pràctica. Tot i que si bé el meu objectiu de petit era guanyar una partida, ara és obtenir beneficis econòmics.

1.2. Hipòtesi del treball

La hipòtesi del treball és comprovar si es pot obtenir benefici econòmic de jocs d'atzar mitjançant l'aposta. Aquest tema és el mateix que el de molts mites, els quals asseguren que hi ha hagut persones capaces de, mitjançant el càlcul, fer una gran fortuna.

1.3. Objectius

L'objectiu del treball és estudiar de forma matemàtica les estratègies que podem seguir en diferents jocs per a obtenir beneficis. L'estudi matemàtic que portarem a terme només farà ús dels termes més senzills de la teoria de probabilitats. Encara que actualment aquests temes es treballin amb eines més complicades, considero que amb les definicions bàsiques en tindrem suficient per a poder extreure algunes conclusions.

1.4. Estructuració del treball

El treball es separa en diferents apartats. En els punts 2, 3 i 4 s'exposaran els coneixements teòrics que és la base matemàtica que es fa servir en la resta del treball. En 5 analitzarem el joc de la Primitiva, on aplicarem les eines matemàtiques abans exposades. En l'apartat 6 s'estudiarà la ruleta, amb la qual s'introduirà un anàlisi d'estratègia d'apostes. En el punt 7 s'estudiarà la Martingala, una altra estratègia d'apostes de la qual es diu que permet fer fortuna. I en l'últim apartat compararem les dues estratègies generals que hem analitzat en els apartats anteriors.

Òbviament aquest treball de recerca no tindrà una part pràctica que impliqui haver d'apostar realment, però hem de recordar sempre que el nostre objectiu no és altre que aquest, el de obtenir grans beneficis econòmics a partir del joc.

2. Probabilitat

La probabilitat és un terme abstracte, el qual intenta quantificar la freqüència relativa amb que succeeixen uns fets. De la mateixa manera que la freqüència relativa, la probabilitat té uns valors que varien de 0 a 1, no té unitats, i com més grans són els valors impliquen que és més probable que aquest fet ocorri.

2.1. Definició clàssica del terme probabilitat

Si realitzem un experiment *N* vegades amb diferents resultats, sent *A* el nombre de vegades que surt un resultat *a*, la freqüència relativa d'aquest resultat serà:

$$f_a = \frac{A}{N}$$

Aquesta freqüència variarà amb el nombre de vegades que realitzem l'experiència. Tot i això, la llei empírica de l'atzar ens diu que si repetim una prova un nombre cada vegada major de vegades, la freqüència de cada resultat tendirà a un número, i aquest número és el que s'anomena probabilitat.

La probabilitat, és, per tant, el límit de la freqüència relativa. Però també es pot definir d'una forma molt més senzilla, que és:

$$P(a) = \lim_{N \to \infty} \frac{A_a}{N} = \frac{n_a}{n}$$

On n_a és el nombre de resultats en que ocorre *a* i n el nombre total de resultats. Normalment, en lloc d'n s'escriu Ω.

Per exemple:

Fent servir l'experiència de llançar un dau perfecte (és a dir, que al llançar-lo la probabilitat de que surti cada cara és la mateixa), si llancem el dau 10 vegades i obtenim dos 6's, la freqüència del 6 és de 0,2. Si el llancem 100 vegades i tenim 50 6's, la freqüència serà de 0,5. Però si ho realitzem un nombre enorme de vegades, veurem que a mesura que anem llançant el dau, la freqüència es va apropant a $\frac{1}{6}$, que és la probabilitat de que surti un sis en un dau ideal.

2.2. Definició axiomàtica de la probabilitat

Donat un conjunt de possibles successos, representat per Ω, definirem la probabilitat *P* com una funció real sobre *B*, sent *B* un resultat d'una experiència:

$$P(B) \rightarrow \Re$$

que tingui les següents propietats:

Axioma 1 $\quad$ $P(B) \geq 0$

Axioma 2 $\quad$ $P(\Omega)=1$

Axioma 3 $\quad$ Per a tota successió d'esdeveniments mútuament excloents (és a dir, que $B_i \cap B_j = \emptyset$ per tot *i* i *j* diferents), es satisfà que:

$$P\left(\bigcup_i B_i\right) = \sum_i P(B_i)$$

2.3. Comparació de la definició clàssica i la definició axiomàtica

Ara mostrarem que la definició clàssica de probabilitat és acceptada per la definició axiomàtica que acabem de donar.

Axioma 1 $\quad$ $P(B) = \frac{n_B}{n}$, sent $0 \leq n_B \leq n$, llavors $P(B) \geq 0$

Axioma 2 $\quad$ $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$

Axioma 3 Sent $C = \bigcup_i B_i$, com que els elements B_i són disjuntius, llavors es dóna que: $n_C = n_{B_1} + n_{B_2} + ... + n_{B_n}$ (on n_C és el nombre de resultats favorables a C). Així que:

$$P(\bigcup_n B_n) = P(C) = \frac{n_{B_1} + n_{B_2} + ... + n_{B_n}}{n} = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n)$$

Per tant la definició clàssica de probabilitat és un cas particular de probabilitat.

3. Esperança matemàtica

La mesura d'esperança matemàtica dóna un sentit matemàtic als beneficis que obtenim per partida al jugar a un joc. D'aquesta manera, els valors no estan limitats com ho estan els d'esperança matemàtica, poden ser tant positius com negatius, i normalment tenen unitats.

3.1. Definició tradicional d'esperança matemàtica

Si realitzem un experiment *X* un nombre *N* de vegades, sent X_1, X_2, ..., X_n tots els resultats possibles, i A_1, A_2, ..., A_n el nombre de vegades que es donen aquests resultats respectivament, la mitjana aritmètica dels resultats serà:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i A_i}{N}$$

Si recordem la definició de freqüència relativa $f_n = \frac{A_n}{N}$, llavors podem escriure la mitjana aritmètica com:

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i f_i$$

Aquesta mesura, que per un nombre petit d'experiències pot variar enormement, té un número definit per a el seu límit al infinit. Si recordem la definició de probabilitat, $P(X_i) = \lim_{N \to \infty} \frac{A_i}{N} = \frac{n_i}{n}$ on n_i i *n* eren el nombre d'esdeveniments elementals a favor del succés i els esdeveniments totals respectivament, llavors podem fer el límit de la mitjana aritmètica i expressar-lo segons la probabilitat de cada resultat:

$$E(X) = \lim_{N\to\infty} \overline{X} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i f_i = \sum_{i=1}^{n} X_i P(X_i) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i n_i}{n}$$

3.2. Propietats de l'esperança matemàtica

De la definició d'esperança matemàtica es mostra que aquesta mesura compleix una sèrie de propietats. Sent *a* un nombre qualsevol, i *X* i *Y* un esdeveniment, i definint *aX* com l'esdeveniment en que tots els resultats possibles $(aX_1, aX_2, ..., aX_n)$ tenen un d'associat amb *X* $(X_1, X_2, ..., X_n)$, tal que la seva probabilitat sigui la mateixa i el seu premi compleixi que $\frac{aX_1}{X_1} = \frac{aX_2}{X_2} = ... = \frac{aX_n}{X_n} = a$:

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

I d'aquestes propietats es dedueix que:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Per tant l'esperança matemàtica és un operador lineal.

4. La Primitiva

4.1. Sobre la primitiva

La Primitiva és un joc d'apostes organitzat per l'Estat que consisteix en escollir 6 nombres de l'1 al 49, i un nombre de reintegrament, que pot anar de l'0 al 9. Al jugar s'extreuen 6 boles, més una complementària, i per separat la bola del reintegrament.

També es poden fer apostes més complexes, com escollir diversos números com a guanyadors amb un augment mínim del preu, cosa que complica massa les apostes. Nosaltres l'analitzarem d'una forma senzilla sense entrar en gaires detalls tècnics del joc, per tal de facilitar l'estudi.

En aquest joc els premis s'obtenen al encertar un mínim de 3 boles de les 6 primeres, o si no s'aconsegueix, obtenint el reintegrament. També s'obté premi si s'encerten 5 boles i la sisena coincideix amb la bola complementaria. El premi augmenta a mesura que la probabilitat d'encertar disminueix (com resulta obvi).

Llavors l'ordre de premis és (de major a menor):

- Encertar 6 boles, que té com a premi un $23{,}4\%$ de la recaptació a distribuir de forma equitativa entre tots els resultats encertants.
- Encertar 5 boles més el complementari, que té com a premi el $3{,}6\%$ a distribuir de forma equitativa entre tots els resultats encertants.
- Encertar 5 boles, que té com a premi el $7{,}2\%$ a distribuir de forma equitativa entre tots els resultats encertants.
- Encertar 4 boles, que té com a premi el $10{,}8\%$ a distribuir de forma equitativa entre tots els resultats encertants.
- Encertar 3 boles, que té com a premi 8€.
- Encertar el reintegrament, que té com a premi 1€.

Participar a la primitiva costa 1€ per aposta.

L'Estat dedica un 45% de la recaptació als 4 primers premis, i aproximadament un 10% als últims 2, de forma que sempre hi ha una quantitat dedicada a l'Estat, i això fa que la esperança dels jugadors sigui, normalment, negativa, ja que els diners recaptats al repartir-los equitativament hi pertoca a cada persona menys quantitat de la que ha jugat.

Però la primitiva té una norma especial, i és que els primers premis que queden deserts es guarden pels següents sorteigs, cosa que fa augmentar el capital repartit. Això ens fa pensar que si aquest capital que es va acumulant pogués sobrepassar la quantitat que s'endú l'Estat, llavors la nostra esperança es tornaria positiva.

Finalment fixem-nos en que el percentatge de recaptació del segon premi és inferior al del tercer premi i al del quart. Això té una causa, i és que, com que els premis es reparteixen entre tots els encertants, llavors l'esperança és que el tercer i quart premi siguin més petits que el segon. Això ho demostrarem més endavant, fent ús de les probabilitats de que toqui cada premi.

4.2. Probabilitat per categoria

Ara començarem amb l'anàlisi matemàtic de la primitiva. Primer de tot, calcularem la probabilitat de que toqui cada premi.

Per a calcular la probabilitat de que toqui el primer premi, que és encertar les 6 boles, calcularem el nombre total de casos que hi ha de escollir de 49 boles, 6, sense importar l'ordre. Això és igual a $\binom{49}{6}$, on $\binom{n}{m}$ és el nombre de formes en que podem escollir *m* elements d'un conjunt d'*n* sense importar l'ordre. Aquesta expressió és equivalent a $\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m(m-1)(m-2)...1} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, on $n! = n(n-1)(n-2)...1$. D'aquesta manera

$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49*48*47*46*45*44}{720} = 13983816$. Per tant, i com només hi ha una combinació guanyadora, la probabilitat del primer premi és de:

$$P_6 = \frac{1}{13983816} = 7{,}151 \cdot 10^{-6}\%$$

Per al segon premi, que és dóna al encertar 5 boles més la complementaria, raonarem que hem de escollir 5 boles de les 6 com a encertants, i l'última quedarà definida com a coincident amb la complementària. Per tant, tindrem 6 possibilitats, que, com no s'han d'ordenar, es queda en 6 casos de 13983816:

$$P_{5+C} = \frac{6}{13983816} = 4{,}291 \cdot 10^{-5}\%$$

En el tercer premi hem calculat tots els casos en que escollim 6 boles de les 5 guanyadores i de les 42 que no són ni guanyadores ni la complementària, n'agafem 1. D'aquesta manera separem la segona categoria, que a més de 5 guanyadores obtenen el reintegrament, de la tercera categoria.

$$P_5 = \frac{\binom{6}{5}\binom{42}{1}}{13983816} = \frac{42*6}{13983816} = 1{,}802 \cdot 10^{-3}\%$$

Per al quart, i cinquè premi farem un raonament general: dels 6 números escollits, n'hi hauran *n* (una variable que definim ara) que es corresponguin amb els 6 escollits, i, per tant, *6-n* no hi coincidiran, o sigui que pertanyeran als altres 43 nombres. Matemàticament això ho expressarem com $\binom{6}{n}$ i $\binom{43}{6-n}$ casos respectivament. Per tant, el total serà:

$$P_n = \frac{\binom{6}{n}\binom{43}{6-n}}{13983816}$$

D'aquesta manera obtenim:

$$P_4 = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{13983816} = 9{,}686 \cdot 10^{-2}\%$$

$$P_3 = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{13983816} = 1{,}765\%$$

Finalment, per a calcular la probabilitat de que toqui el reintegrament, calcularem la probabilitat de que el nombre marcat com a tal sigui l'adequat, i el multiplicarem per la probabilitat de que no toqui cap premi, ja que si s'obté una combinació superior, el premi que s'atorga no és el reintegrament, sinó el major premi obtingut.

Per a tal objectiu sumarem totes les probabilitats anteriors, i hi calcularem el complementari al resultat. Així, la probabilitat de que no es guanyi des del primer al cinquè premi és de $P = 98{,}14\%$. Si això ho multipliquem per 1 dècim, que és la probabilitat de que toqui el reintegrament, obtindrem que la probabilitat de que ens premin amb el reintegrament és de $P_R = 9{,}814\%$.

Així finalment veiem que el premis estan ordenats, com és lògic, de forma que les categories superiors són més improbables que toquin. Com a punt final podem dir que la probabilitat de que toqui com a mínim un reintegrament és de $P_T = 12{,}67\%$.

4.3. Premi mitjà per categoria

Ara demostrarem que el premi i el nombre de boles encertades disminueixen a la vegada. Per a tal, definirem el premi mitjà PM_n com el premi total d'una categoria *n* dividit entre l'esperança de guanyadors del premi. D'aquesta manera, sent P_n la probabilitat d'encertar el premi, *N* el total de participants, i

Q_n el percentatge de recaptació dedicat a la categoria, i comptant que cada participació costa 1€, tenim que:

$$PM_n = \frac{Q_n N \cdot 1€}{P_n N} = \frac{Q_n}{P_n} [€]$$

El numerador és $Q_n N \cdot 1€$ ja que $N \cdot 1€$ és el total de la recaptació, i Q_n ens diu quina proporció de la recaptació es destina cap a aquest premi, i el denominador és $P_n N$ ja que l'esperança és de que cada persona guanyi el premi de la categoria P_n vegades per participació, i com hi ha N participacions, la suma de les esperances de cada persona de guanyar el premi dóna $P_n N$ com a esperança d'encertants que guanyaran el premi de la categoria n.

Ens fixem que, tot i el resultat sigui un quocient de proporcions (ja que Q_n és una proporció, i la probabilitat és una mesura abstracta sense unitats) el resultat s'expressa en €.

D'aquesta manera si comparem els premis mitjans de cada combinació, obtenim que:

Categoria	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)
Premi	23,4% Recaptació	3,6% Recaptació	7,2% Recaptació	10,8% Recaptació	8€	1€
Probabilitat	$7{,}151 \cdot 10^{-6}\%$	$4{,}291 \cdot 10^{-5}\%$	$1{,}802 \cdot 10^{-3}\%$	$9{,}686 \cdot 10^{-2}\%$	1,765%	9,814%
Premi mitjà	3272270€	83897€	3995€	111,5€	8€	1€

D'aquesta manera els percentatges que s'atribueixen a cada categoria semblen ser més coherents.

4.4. La Primitiva com a font de beneficis

Ara ens fixarem en el que ja hem comentat abans. Pot ser que el fet que els primers premis no atorgats a ningú permetin que a vegades la primitiva tingui una esperança positiva? Això ho mostrarem ara mitjançant la definició d'esperança (on C_i és el premi d'una categoria):

$$E_T = E_{\Pr emis} + E_{Cost} = \sum P_i C_i - 1€$$

Ara, aclarint que el capital acumulat (que s'anomena pot, i que definirem com *B*) s'atorga únicament al guanyador del primer premi, desenvolupem l'expressió anterior, i si volem que l'esperança sigui superior, escriurem com segueix:

$$\sum P_i C_i - 1 > 0$$

$$P_6 (PM_6) + P_{5+C} PM_{5+C} + P_5 PM_5 + P_4 PM_4 + P_3 PM_3 + P_R PM_R - 1 > 0$$

$$P_6 \left(\frac{B}{P_6 N} + \frac{Q_6}{P_6} \right) + P_{5+C} \frac{Q_{5+C}}{P_{5+C}} + P_5 \frac{Q_5}{P_5} + P_4 \frac{Q_4}{P_4} + P_3 \frac{Q_3}{P_3} + P_R \frac{Q_R}{P_R} - 1 > 0$$

$$\frac{B}{N} + Q_6 + Q_{5+C} + Q_5 + Q_4 + Q_3 + Q_R - 1 > 0$$

Si ens fixem bé ara hem comès un error, i és que el premi mitjà de les últimes dues categories no és calcula com les altres, ja que és un premi constant. Però com ja hem comentat abans, l'Estat dedica un 55% de la recaptació aproximadament a tots els premis (percentatge que varia però que les dades obtingudes per l'Estat són aquestes). Per tant, la suma de totes les proporcions de cada premi sobre el total de recaptació serà aproximadament 0,55. Substituint tenim que:

$$\frac{B}{N} + 0{,}55 - 1 > 0$$

$$B > 0{,}45 N [€]$$

Per tant, com havíem suposat al principi, la nostra esperança serà positiva en quan el pot superi la quantitat de diners que s'emporta l'Estat, que és aproximadament el 45% de la recaptació.

Aquesta expressió teòrica ens hauria de guiar a l'hora d'apostar a la primitiva. El problema és que, com que la quantitat de capital acumulat depèn de la participació de la gent, mai podem estar segurs de que la nostra esperança vagi a ser positiva. Tot i que això no hauria de ser un problema si tothom apostes la mateixa forma cada dia que s'hi jugués a la primitiva, el simple fet que aquesta estratègia existeixi ja provoca un defecte en la mateixa estratègia. És a dir, que siguem selectius nosaltres per a tal d'obtenir una esperança positiva implica que altra gent també pugui estar fent el mateix i així aquest efecte que té el pot sobre la participació ens impedeixi calcular quan exactament tindrem beneficis al jugar a la primitiva. Aquest efecte el podem expressar com, per a que l'esperança sigui positiva, és té que donar que:

$$\frac{B}{N(B)} > 0{,}45$$

On $N(B)$ és una funció la qual modelitza la participació en dependència amb el pot, funció que podríem extreure de no ser perquè els participants a la primitiva no són mai els mateixos, i per tant, una vegada la deduíssim, aquesta funció tindria un temps de validesa després del qual deixaria de fer-nos servei.

4.5. Conclusions dels resultats teòrics

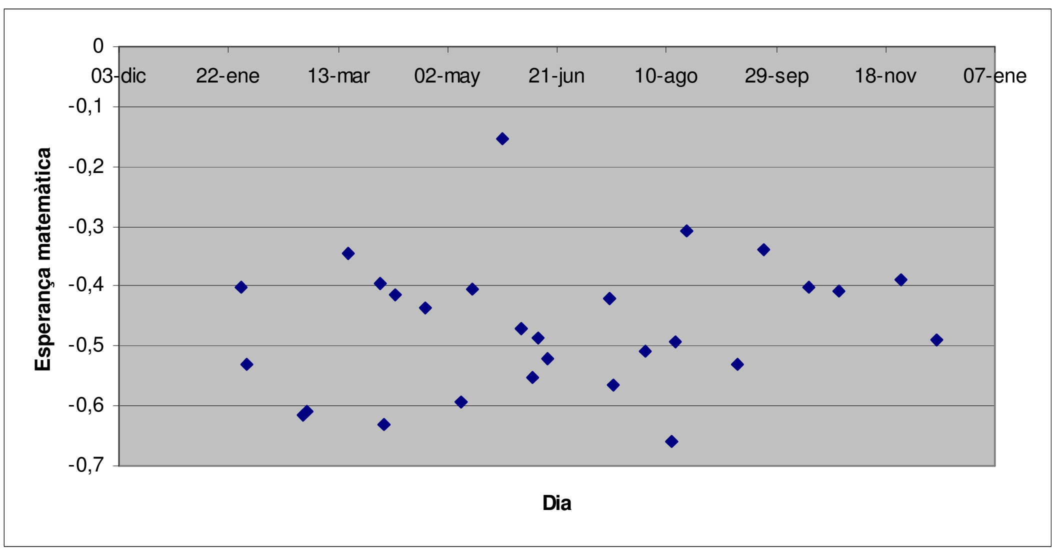
Prenent tot el que s'ha demostrat sobre la Primitiva, podem dir que al jugar a la primitiva, si volem guanyar-hi diners, o com a mínim que la nostra esperança matemàtica sigui positiva, haurem de jugar quan, considerant el pot que s'ha acumulat fins a aquell moment, veiem que aquest dividit entre 0,45 és superior a la participació que nosaltres consideréssim que hi podria haver (que és desconeguda fins al mateix moment del sorteig). Tot i això, no es considera aquest un mètode gaire fiable, ja que, tot i tenint esperança positiva, la probabilitat de que ens toqui el premi gros és molt petita, i hi podríem jugar tota la vida sense que mai ens toqués. Per tant tot benefici teòric que anéssim a obtenir quedaria condicionat per la probabilitat de guanyar un primer premi abans de fer-nos massa vells.

4.6. Comprovació estadística de les conclusions de la primitiva

Per a més seguretat corroborarem els càlculs realitzats amb proves estadístiques. Per a això agafarem les dades de la primitiva del 2010 i intentarem veure que quan el pot és més gran de lo habitual, l'esperança pot ser positiva, i que si el capital guardat d'altres ocasions és nul, llavors l'esperança volta pel –0,45 , ja que, com ja hem comentat, l'Estat només hi dedica aproximadament un 55% de la recaptació als premis.

Llavors, fent servir les dades històriques, multiplicarem els premis de cada dia per les seves respectives probabilitats teòriques, i calcularem l'esperança mitjana.

Així, dels dies en que no hi havia pot del 2010, les respectives esperances eren les que es veuen a la gràfica:



A la gràfica es pot veure com els valors ronden el –0,45, esperança matemàtica que havíem predit. De fet, la mitjana aritmètica dels valors és -0,4670. Per tant, la nostra hipòtesi de que sense capital acumulat l'esperança matemàtica és negativa es compleix.

Però al 2010 només van haver-hi 5 ocasions en que el pot fos suficientment gran per permetre que l'esperança matemàtica fos positiva. Tot i que aquestes no són suficients dades per assegurar res, el fet que no hi hagin gaires dies amb esperança matemàtica positiva demostra el fet que vam comentar a l'apartat anterior de que com més gran és el pot més participació hi ha, i per tant és torna molt més complicat assolir esperances positives.

4.7. Conclusions dels resultats estadístics

Amb les dades estadístiques que tenim podem dir que la primitiva, tot i tenir a vegades moments d'esperança positiva, no és un joc al que es pugui jugar si es vol tenir beneficis, ja que l'efecte que produeix l'augment de pot sobre la participació contraresta en la majoria de casos el mateix augment de pot, i per tant l'esperança no sol arribar a ser positiva.

D'aquesta manera es verifica els càlculs teòrics que hem fet, tot i que el nostre requisit inicial per a l'esperança positiva fos massa optimista i tractés la participació com una constant.

5. La ruleta

5.1. Sobre la ruleta

La ruleta és un joc d'atzar típic dels casinos. D'arrels desconegudes, es creu que la primera persona en normalitzar les normes va ser Blaise Pascal, qui va escollir el número 36 com a número de caselles. Més tard es modificaria aquest nombre per 37 per permetre al casino obtenir beneficis.

La ruleta consisteix en un plat que gira on hi ha marcats els números de l'0 al 36 (amb doble zero, 00, en el cas de les ruletes americanes) en una sèrie de posicions distribuïdes en forma circular. A aquesta base s'hi llença una bola que girarà fins a que la ruleta, per fregament amb l'aire, acabi perdent la inèrcia inicial, i la bola es trobi en un dels números. Aquells qui haguessin fet una aposta a aquell número s'emporten una quantitat de fitxes proporcional a la seva aposta i inversament proporcional a la quantitat de caselles on s'hagués fet.

Les apostes poden variar en quant el nombre de fitxes i el nombre de caselles. Mentre que en el nombre de fitxes no hi ha limitacions (o les limitacions que hi puguin haver-hi no ens interessen) el que mirarem ben de prop són com varien premis amb les apostes sobre el nombre de caselles.

Els casinos fan servir la següent expressió pels premis:

$$P = \frac{36}{c} A$$

On *c* és el nombre de caselles on s'ha apostat, *A* l'aposta realitzada i *P* el premi.

Aquesta expressió està basada en el joc amb les normes de Blaise Pascal, de forma que quan es juga amb una ruleta de 36 caselles cada aposta té una esperança igual a 0, i quan es juga amb 37 o més caselles la tendència és que el casino obtingui benefici.

Aquest fet es veu si diferenciem la aposta del premi posterior. L'esperança quan apostem és de perdre la quantitat *A*, és a dir, $E_1 = -A$. Després, al fer servir la ruleta, l'esperança és la probabilitat pel premi, el qual ja hem explicat.

En el cas de la ruleta de Pascal, l'esperança total serà: $E_T = E_1 + E_2 = -A + \frac{c}{36}\frac{36}{c}A = 0$. Això vol dir que un jugador que jugui a aquesta ruleta a la llarga els seus beneficis igualaran les seves pèrdues i ningú acabarà tenint un clar avantatge del joc.

En el cas de la ruleta de casino, en canvi, l'esperança total és de: $E_T = E_1 + E_2 = -A + \frac{c}{37}\frac{36}{c}A = -\frac{1}{37}A$. És a dir, que a la llarga el jugador que aposta de forma aleatòria perd $\frac{1}{37}A$ per partida, és a dir, que el casino a la llarga obté grans beneficis.

5.2. Les ruletes com a eines imperfectes

Aquests casos que acabem d'estudiar ens mostren com sempre que juguem a la ruleta tindrem una tendència en contra de perdre el nostre capital, si aquí ens aturéssim les nostres conclusions restarien en negar totes les llegendes de grans fortunes creades amb el joc.

Però en tots aquests casos estem considerant la ruleta com una màquina que permet produir resultats atzarosos completament equiprobables. I un petit error en l'estructura de la ruleta pot desequilibrar-la i produir diferències de probabilitats importants. Tot i que aquest fenomen és difícil de detectar a simple vista, ja que els jugadors solen variar el número al qual aposten amb molta freqüència, i per tant la diferència de probabilitats entre dos números acaba sent desvalorada, realment hi ha un error en la ruleta, ja que, com tots els objectes materials, és impossible que siguin completament perfectes.

El clan dels Pelayo van demostrar que aquest error mecànic podia arribar a ser molt útil. Després de moltes observacions d'una ruleta, un és capaç d'observar quines caselles tenen més probabilitat de sortir, i aprofitar aquest fet. Però tot i que obtinguem aquest resultat també ens hem de fixar en un altre aspecte. El petit desequilibri que avantatja al casino ha de ser superat per l'error, és a dir, que el fet que el casino tingui una casella a favor seu provoca que tingui un marge d'error acceptable. Això ho podrem calcular gràcies a l'esperança:

Com que volem que la nostra esperança sigui positiva, el càlcul serà el següent:

$$E_T = E_1 + E_2 = -A + (p_1 + p_2 + ... + p_c)\frac{36}{c}A > 0$$

On p_j és la probabilitat de que el resultat sigui una de les caselles on s'ha apostat. Com que és molt improbable que diversos errors apareguin en varies caselles de forma favorable (tenint en compte que com que la suma de totes les probabilitats ha de ser 1, cada error positiu que tinguem en una casella provocarà un error negatiu en altres), estudiarem únicament el cas en que c=1. Llavors, la probabilitat d'aquesta única casella amb un error a favor nostre haurà de ser:

$$p > \frac{1}{36}$$

Cosa que es dedueix de l'anterior expressió.

5.3. Modelització de l'aposta constant

Si a partir del que hem estudiat fins ara de la ruleta volem arribar a extreure'n conclusions, ens convé modelitzar les possibles apostes que podem fer de la forma més senzilla possible. Per a això considerarem a partir d'ara que sempre apostem al mateix número la mateixa quantitat de diners.

Llavors el que intentarem trobar és alguna mesura que ens quantifiqui si es pot jugar de forma rendible econòmicament tenint esperança positiva. Per a això definirem un terme abstracte que serà la probabilitat de poder jugar a la ruleta il·limitadament, que anomenarem la probabilitat de guanyar il·limitadament, i per a calcular-la, definirem un altre terme abstracte, que serà la probabilitat de perdre tot el capital inicial abans d'arribar a un objectiu econòmic.

El primer terme que ens convé definir i estudiar és la probabilitat de perdre tot el capital abans d'arribar a un objectiu econòmic. Anomenarem a aquest terme $f(x)$, el qual no només depèn d'*x* (que serà el capital disponible) sinó també del benefici que obtinguem en cada tirada a favor, que passarem a anomenar *b* i la pèrdua en cada tirada en contra, *c*, la probabilitat de guanyar una tirada *q* , i la quantitat "objectiu" a la que es vol arribar *y*. Tot i això només deixarem indicada la dependència amb *x* ja que la resta de termes es poden considerar constants i així facilitem els càlculs.

Aquesta funció ha de complir una cosa: o bé després fer la primera tirada la guanyem, o bé la perdem. Llavors podem escriure que la probabilitat de perdre-ho tot és igual a la probabilitat de que això passi una vegada has guanyat la primera mà, més la probabilitat de que això passi havent perdut la primera mà. És a dir:

$$f(x) = q \cdot f(x+b) + (1-q) \cdot f(x-c)$$

Això es pot demostrar segons la teoria de successos, de la següent manera:

Sent *A* l'esdeveniment d'arruïnar-te, *G* el de guanyar una partida i *P* el de perdre-la, tenim que:

$$A = A \cap \Omega$$

Com que G i P són mútuament excloents i complementaris ($G \cup P = \Omega$ i $G \cap P = \varnothing$), llavors tenim que:

$$A = A \cap (G \cup P) = (A \cap G) \cup (A \cap P)$$

I si ara calculem la probabilitat *p* d'aquests successos, obtindrem que:

$$p(A) = p[(A \cap G) \cup (A \cap P) = p(A \cap G) + p(A \cap P)$$

Que, si apliquem la regla de Bayes, obtenim que:

$$p(A) = p(A \mid G) p(G) + p(A \mid P) p(P)$$

Que és el que volíem comprovar. Fixem-nos que $p(A) = f(x)$, ja que les dues signifiquen el fet de quedar-se sense capital; $p(A \mid G) = f(x+b)$, ja que una vegada has guanyat la primera partida, el capital que tens és l'anterior més el premi; $p(G) = q$, ja que hem definit *q* com la probabilitat de guanyat una mà; i per arguments anàlegs, $p(A \mid P) = f(x-c)$ i $p(P) = 1-q$.

Aquesta relació que hem demostrat ens permetrà trobar un model que s'aproximi a la probabilitat de perdre-ho tot.

Aquesta funció $f(x)$ ha de complir que, una vegada el capital és 0, la probabilitat de perdre-ho tot sigui 1, i que una vegada que arribem al capital objectiu la probabilitat de perdre-ho tot sigui nul·la, és a dir, $f(y) = 0$. Per tant tindrem un sistema d'equacions on la incògnita és una funció:

$$f(x) = q \cdot f(x+b) + (1-q) \cdot f(x-c)$$
$$f(y) = 0$$
$$f(0) = 1$$

Aquesta funció, per cert, tindrà un domini dels valors de *x* pertanyent a l'interval [0,y], i serà una funció decreixent a tot l'interval.

Aquest tipus d'equacions on la incògnita és una funció no tenen regles que permetin arribar a una solució de forma general. Així que l'única manera per la qual vam poder trobar una solució va ser fent servir diferents funcions que en un primer moment semblaven seguir el comportament que volem estudiar fins a trobar-ne una que compleixi les condicions.

La solució a la que vam arribar va ser que $f(x) = AB^x + C$. Si substituïm al sistema anterior tenim que:

$$AB^x + C = q\left(AB^{x+b} + C\right) + (1-q)\left(AB^{x-c} + C\right) \qquad (1)$$

$$AB^y + C = 0 \qquad (2)$$

$$A + C = 1 \qquad (3)$$

De (1) deduïm que:

$$B^x = qB^{x+b} + (1-q)B^{x-c}$$

Aquesta equació ens relaciona la variable *x* amb el valor *B* i els valors *b*, *c* i *q*. Com que *B* no depèn de *x*, ja que el model que hem agafat així ho declara, dividirem tota la equació entre B^x i trobarem una expressió on es trobarà únicament el valor *B* i els valors inicials *b*, *c* i *q*.

$$1 = qB^b + \frac{1-q}{B^c}$$

$$qB^{b+c} - B^c + 1 - q = 0$$

Equació d'on podrem extreure el valor de B, tot i que no de forma general, ja que bé pot ser un polinomi amb casos en que *b* i *c* siguin naturals, però en la resta de casos l’expressió ja no serà un polinomi.

Ara que tenim el valor de B d’alguna manera definit, si prenem (2) i (3), i ens fixem que aquestes dues equacions ens relacionen els valors d'*A* i *C* amb *B* i *y*. Si d'aquestes equacions aïllem *A* i *C*, tenim que:

$$A = \frac{1}{1 - B^y}$$

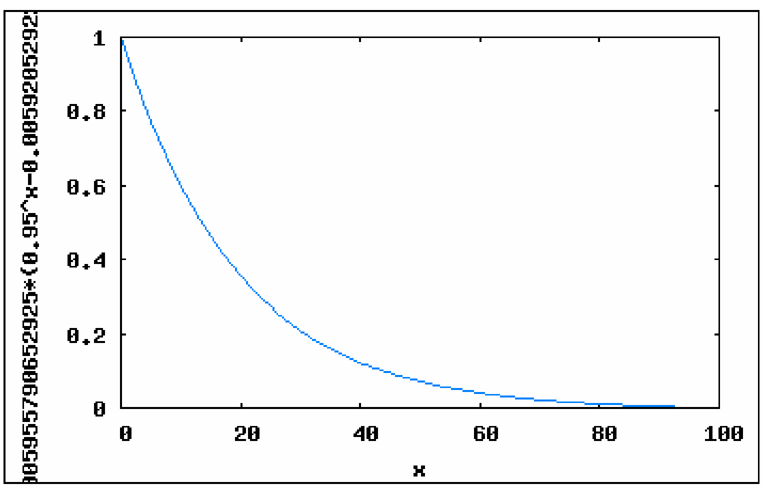
$$C = \frac{-B^y}{1 - B^y}$$

Si substituïm aquests valors en la funció original obtindrem que:

$$f(x) = \frac{B^x - B^y}{1 - B^y}$$

On B compleix que $qB^{b+c} - B^c + 1 - q = 0$.

Aquí tenim un exemple de l’expressió, on *B*=0,95 i *y*=100:



En la gràfica veiem com l’expressió pren forma d’una corba decreixent, surt d’1 i arriba a 100, tal i com havíem definit.

Aquesta expressió que hem trobat serveix també per resoldre molts altres problemes, com per exemple, el cas de la ruïna del jugador, joc estudiat i resolt per De Moivre i Bernoulli, que era un cas particular del que estem estudiant.

Ara bé, el que nosaltres hem trobat ha sigut una modelització d'un comportament, i, tot i que la solució coincideixi en alguns casos amb la solució exacta, com és el cas de la ruïna del jugador, en altres casos només s'hi aproximarà. Per exemple, si escollim b=2, c=2, x=2, la probabilitat per a y=3 serà la mateixa que per a y=4, ja que en aquest cas seria impossible arribar a un capital no parell, i per tant la probabilitat d'arribar a 3 o més és la probabilitat d'arribar a 4. Però l'expressió que hem trobat en canvi dóna dos solucions distintes per a y=3 i y=4.

Ara bé, el fet que sigui una aproximació no ens resultarà un problema per a calcular la probabilitat de guanyar il·limitadament. Això ho veurem més endavant.

5.4. Sobre els valors coherents de la variable *B*

Però encara tenim un problema, i és que tot i que tenim B definida en una equació, és possible que aquesta tingui més d'1 solució? I si així fos, quina solució hauríem de triar?

Llavors, analitzant els possibles valors de B ens trobem que, si B és superior a 1, llavors la funció $f(x)$ prendrà valors positius en tot el domini, ja que tant el seu numerador com el seu denominador seran negatius. Si B és inferior a 1, llavors la funció també prendrà valors positius sempre, ja que tant numerador com denominador seran positius. Però B no podrà ser mai 1, 0 o un valor negatiu, ja que, en cas de valer 0 o 1 la funció, $f(x) = AB^x + C$, seria constant. I si B fos negativa llavors tindria valors negatius, cosa impossible en una probabilitat.

Per tant de la equació $qB^{b+c} - B^{c} + 1 - q$ només buscarem les solucions dins de l'interval $(0,1) \cup (1,\infty)$.

5.5. Demostració de que només existeix un valor de B coherent

Si definim la funció $g(B) = qB^{b+c} - B^{c} + 1 - q$, i mirem els seus intervals de monotonia en l'interval $(0,\infty)$, veurem com la derivada $g'(B) = q(b+c)B^{B+c-1} - cB^{c-1}$ només es pot anul·lar en 3 punts. En *B*=0 (si és que *c*>1) i en els dos possibles valors de $B_{est} = \sqrt[b]{\frac{c}{q(b+c)}}$ (si és que *b* és un nombre natural parell).

Però l'únic punt estacionari que ens interessa és el valor positiu de $B_{est} = \sqrt[b]{\frac{c}{q(b+c)}}$, el qual ens divideix l'interval $(0,\infty)$ ens dos intervals monòtons, $\left(0, \sqrt[b]{\frac{c}{q(b+c)}}\right)$ i $\left(\sqrt[b]{\frac{c}{q(b+c)}}, \infty\right)$. Cada interval monòton té la propietat de que només pot tenir una arrel, ja que els valors només poden canviar de signe una única vegada a mesura que *B* augmenta en cada un d'ells.

Llavors podem observar que el valor positiu de $B_{est} = \sqrt[b]{\frac{c}{q(b+c)}}$ és inferior a 1 quan l'esperança és positiva:

Si volem provar que:

$$\frac{c}{q(b+c)} < 1$$

I això ho escrivim com:

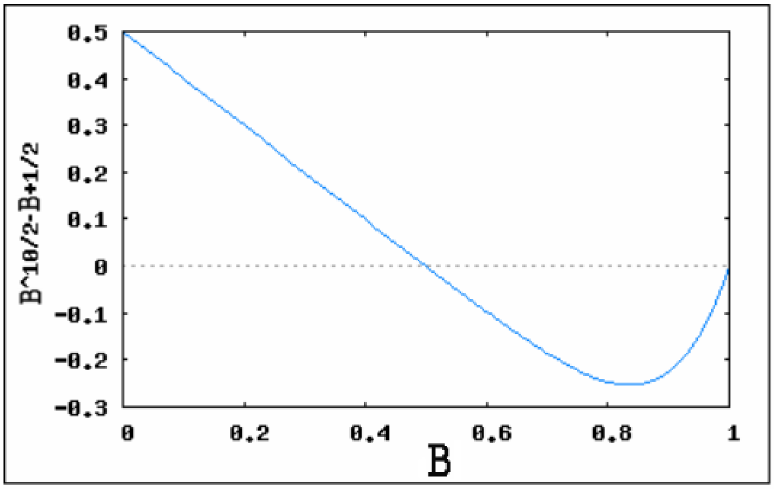
$$qb - (1-q)c > 0$$

I com que l'esperança es calcula com $E = qb - (1-q)c$, llavors el punt estacionari es trobarà sempre entre 0 i 1, sempre que l'esperança sigui positiva.

Llavors podem dir que 1, que és arrel de l'expressió, es troba en l'interval $\left(\sqrt[b]{\frac{c}{q(b+c)}}, \infty\right)$, i per tant $\left(0, \sqrt[b]{\frac{c}{q(b+c)}}\right)$ pot tenir una sola arrel, la qual serà l'únic valor coherent que pot prendre. El fet que existeixi aquesta arrel es demostra aplicant el teorema de Bolzano a l'interval [0,1]:

L'interval [0,1] és un interval continu (menys quan *c* o *b* no són positives, casos il·lògics que no tenim que compte) , i per tant només hi hem de trobar 2 valors de diferent signe per a demostrar l'existència d'aquesta arrel. Si mirem en *B*=0 veurem que la imatge és positiva $g(0) = 1 - q$, excepte en el cas *q*=1, cas en el que sempre guanyaríem i l'estudi seria innecessari, i per tant no és del nostre interès. I l'altre punt que volem trobar el veurem si observem que la derivada en 1 és positiva, ja que aquesta val $g'(1) = q(c+b) - c = qb - (1-q)c$, que és el valor de l'esperança de la qual només estem estudiant els casos en que és positiva. I com que en *B*=1 la funció s'anul·la, llavors existirà un valor immediatament inferior a 1 el qual tindrà imatge negativa. Aquest fet demostra l'existència de l'arrel coherent de l'interval $\left(0, \sqrt[b]{\frac{c}{q(b+c)}}\right)$.

Com a exemple posarem una gràfica on *b*=9, *c*=1 i $q = \frac{1}{2}$, cas en que l'esperança matemàtica és positiva, i val $E = qb - (1-q)c = 4$. Aquest no és un cas de ruleta, però és un cas que il·lustra de forma molt més visible el que hem demostrat.



En la gràfica s'observa clarament com hi ha 1 arrel a l'interval [0,1], que és única, i el punt estacionari que diferencia els dos intervals de monotonia de $g(B)$ en l'interval $(0,\infty)$, i que també es troba en l'interval [0,1].

5.6. La probabilitat de guanyar il·limitadament

Ara que tenim ben definida la variable *B*, podem pensar en el valor abstracte que ens mesurarà la viabilitat de la ruleta si hi volem obtenir beneficis, que era la probabilitat de guanyar il·limitadament. Aquesta mesura té, com el seu nom indica, un objectiu del capital infinit. Tot i que pot semblar paradòxic o il·lògic, matemàticament és una mesura amb sentit, i es calcula fent el límit de la funció probabilitat on *y* tendeix a infinit, és a dir:

$$P_{y=\infty} = \lim_{y\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{B^x - B^y}{1 - B^y}$$

El fet que l'anomenem la probabilitat de guanyar il·limitadament no implica, però, que es pugui guanyar de forma consecutiva totes les partides. Aquesta mesura intenta il·lustrar la probabilitat que tenim de poder jugar a la ruleta sense un objectiu clarament definit. Si el temps que tinguéssim de vida fos infinit, aquesta probabilitat cobraria molt més sentit. Però com els nostres guanys estan limitats pel temps de vida que tenim, aquesta probabilitat simplement simbolitza la seguretat que tenim al jugar.

Com hem demostrat abans, *B* és un valor positiu entre 0 i 1, i per tant, la funció B^{y} decreixerà a mesura que *y* creix, i, com és una exponencial, tendirà a 0. És a dir:

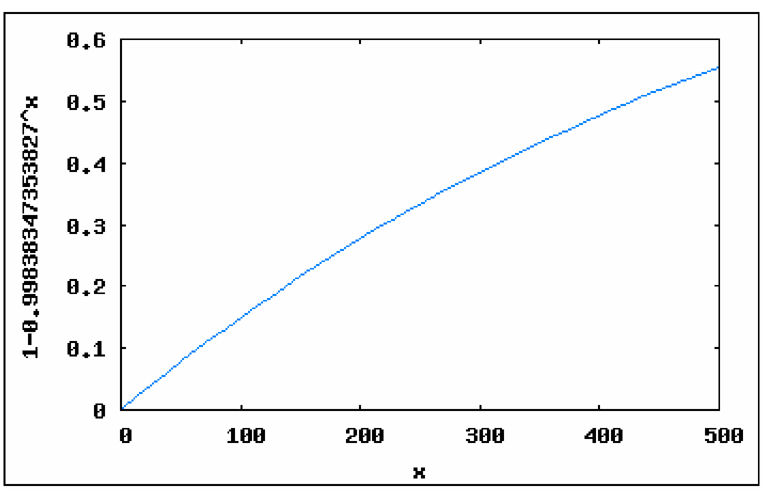
$$P_{y=\infty} = \lim_{y \to +\infty} \frac{B^{x} - B^{y}}{1 - B^{y}} = B^{x}$$

Però aquesta probabilitat que acabem de calcular és la probabilitat de perdre-ho tot quan el teu objectiu és infinit, llavors haurem de trobar la complementaria, que serà la probabilitat de poder jugar il·limitadament:

$$P_{g.il.} = 1 - \lim_{y \to \infty} f(x) = 1 - B^{x}$$

On, recordem, B és un valor que compleix que $qB^{b+c} - B^{c} + 1 - q = 0$ i que $B \in (0,1)$.

Així, per exemple, per a *b*=35, *c*=1 i *q*=$\frac{1}{35}$, i per tant, *B*=0,9984, tenim la gràfica següent:



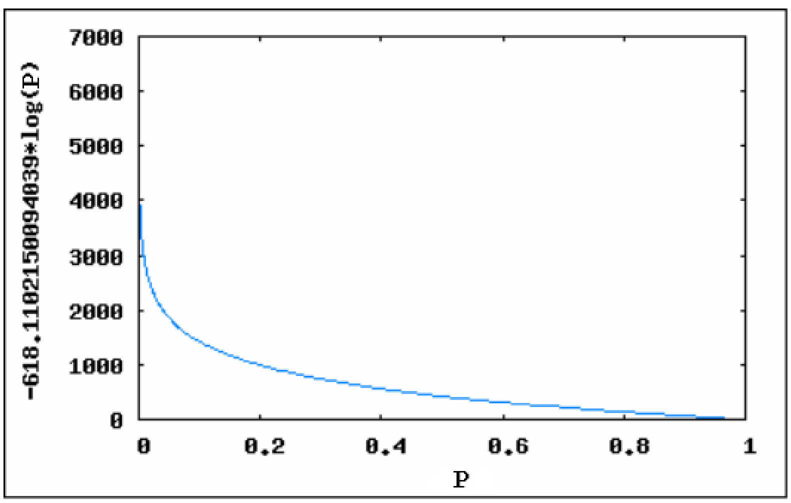
A la gràfica es veu clarament que a mesura que el nostre capital augmenta, augmenta la probabilitat amb la forma d'una exponencial invertida. Aquesta probabilitat tendeix a 1, i per tant, la gràfica té una asímptota, y=1, a la qual s'apropa quan x tendeix a infinit.

5.7. Càlcul del capital necessari per guanyar il·limitadament

Ara que ja hem definit bé com trobar a B, podem passar a calcular el capital que teòricament necessitaríem per a guanyar il·limitadament. Per a fer-ho aïllarem x i el relacionarem amb B i amb la probabilitat de perdre-ho tot (amb objectiu infinit) la qual significarà el perill que tenim al jugar a la ruleta.

$$x = \frac{\ln P_{y=\infty}}{\ln B}$$

Fent servir aquesta expressió i a b=35, c=1 i $q=\frac{1}{35}$, i per tant, B=0,9984, arribem a una gràfica d'exemple que ens mostra com es comporta els capital necessari a mesura que el perill augmenta o disminueix.



Tot i que en la gràfica no s'aprecia, quan la probabilitat de perdre el capital inicial disminueix, el capital tendeix a infinit. D'aquesta manera, mai no s'arriba a tenir un perill nul. I és que si es vol obtenir beneficis en la ruleta, es pot disminuir el perill tant com es vulgui però mai es podrà suprimir.

Fent servir programes que permetin aproximar-nos molt a B, i agafant un perill com a acceptable, podem arribar a trobar el capital necessari disponible. A la següent taula hi ha marcada per a diferents probabilitats que pot tenir un número de la ruleta i diferents probabilitats de perdre tot el capital, els valors d'*x* que necessitem per a que les dues variables anteriors es compleixin. Es mostrarà el valor del capital en "apostes". Aquest valor relatiu el podem fer servir ja que encara no hem definit la unitat de diners que utilitzem. Per tant, al fer servir "l'aposta" com a sistema de diners, *c*=1, *b*=35 (ja que fem servir l'aposta a una casella) i *x* s'expressarà com el nombre d'apostes que podem suportar al principi. Tots els valors tenen esperança positiva, ja que la probabilitat de tots és superior a $\frac{1}{36} = 0{,}02778$:

q\P	**0,5**	**0,15811**	**0,05**	**0,01581**	**0,005**	**0,00158**	**0,0005**	**0,00016**
0,0297	181,11	481,92	782,73	1083,55	1384,36	1685,17	1985,99	2286,80
0,0354	47,78	127,13	206,48	285,84	365,19	444,54	523,90	603,25
0,0450	22,79	60,64	98,48	136,33	174,18	212,03	249,88	287,73
0,0586	13,78	36,66	59,55	82,44	105,32	128,21	151,09	173,98
0,0765	9,40	25,01	40,62	56,23	71,85	87,46	103,07	118,68
0,0987	6,86	18,25	29,64	41,03	52,42	63,81	75,20	86,60
0,1258	5,20	13,85	22,49	31,13	39,77	48,42	57,06	65,70
0,1580	4,04	10,75	17,46	24,16	30,87	37,58	44,29	51,00
0,1962	3,18	8,45	13,72	19,00	24,27	29,55	34,82	40,10
0,2411	2,51	6,69	10,86	15,04	19,21	23,38	27,56	31,73
0,2940	1,99	5,30	8,61	11,91	15,22	18,53	21,83	25,14
0,3569	1,57	4,18	6,79	9,39	12,00	14,61	17,22	19,82
0,4332	1,22	3,25	5,28	7,30	9,33	11,36	13,39	15,41
0,5293	0,92	2,45	3,98	5,50	7,03	8,56	10,09	11,61
0,6617	0,64	1,70	2,76	3,83	4,89	5,95	7,01	8,08

Tal i com s'aprecia a la taula, com més perill acceptem, menys capital necessitem, i a l'inrevés. Això significa que si volem obtenir guanys de forma ràpida, el nostre perill serà més gran, ja que el nombre d'apostes que podem suportar disminuirà a mesura que la quantitat que apostem en cada partida augmenti. Per tant, al jugar a la ruleta hem de fer un balanç entre el perill que estem disposats a patir i la paciència amb que acceptem obtenir els beneficis.

5.8. Conclusions dels resultats teòrics

Com a conclusions podríem dir que al jugar a la ruleta, si un vol obtenir guanys, el que primer que ha de fer és detectar els error mecànics d'aquesta (de forma estadística) i aprofitar-los. Si es troba una casella on la bola arriba amb una freqüència superior a $\frac{1}{36}$ llavors es podrà obtenir beneficis del joc. L'aposta que es faci determinarà el perill amb el que juguem, ja que quants més diners hi dediquem a cada aposta, menys apostes podrem suportar. Així que com més diners hi dediquem a cada aposta més perill correm, però obtindrem beneficis de forma més ràpida en compensació.

5.9. Comprovació estadística de les conclusions de l’estratègia d’aposta constant

Per a corroborar el que hem anat demostrant fins ara compararem els resultats teòrics amb els estadístics, ja que qualsevol matís o aproximació pot tenir un error que a vegades es torna inacceptablement gran.

Per a comparar els resultats teòrics amb resultats reals el que farem servir serà un programa informàtic, ja que si no ho féssim així els temps necessari per obtenir un gran nombre de proves seria excessiu.

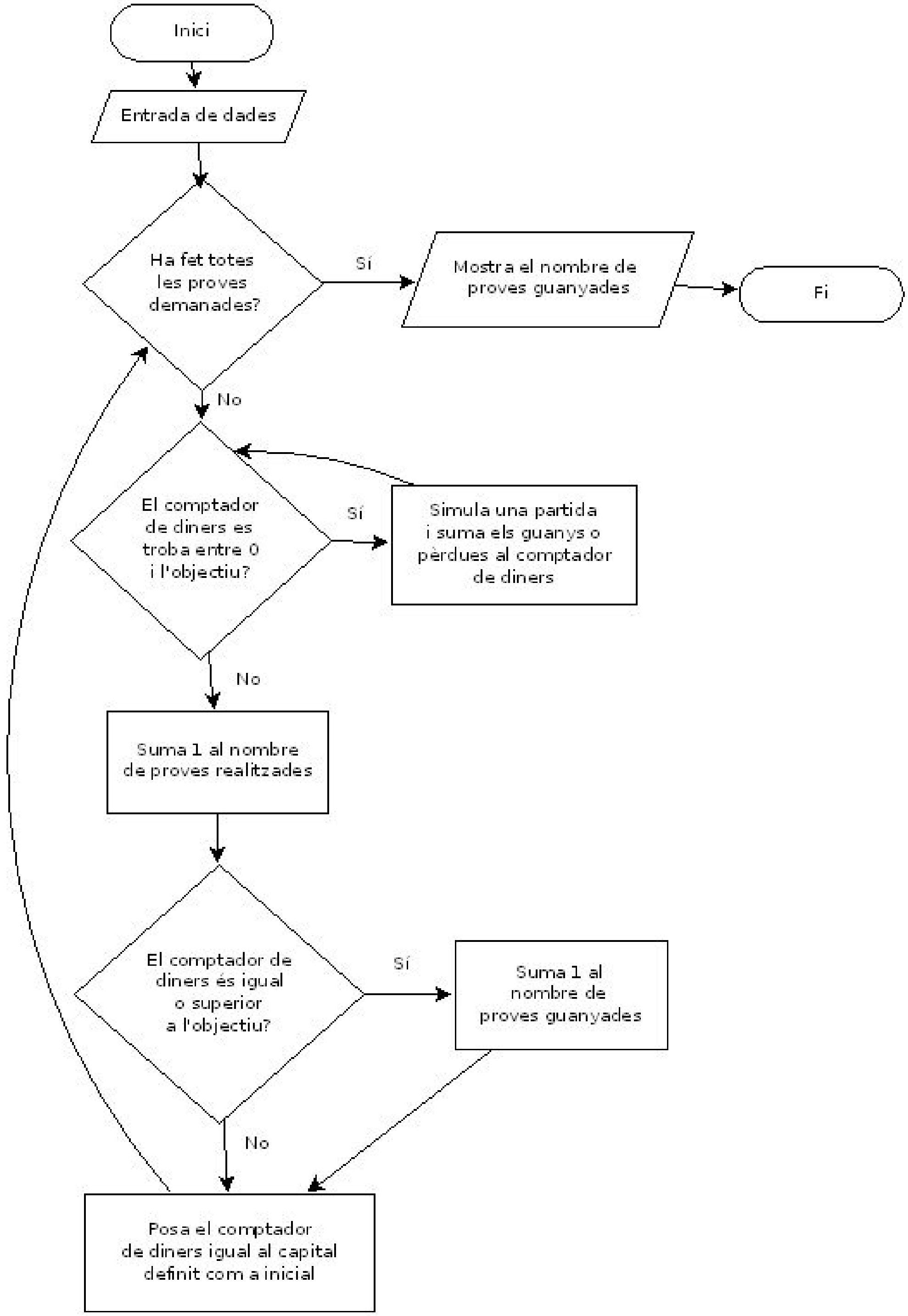
El programa que farem servir està dissenyat en Visual Basic, un sistema de programació senzill desenvolupat Alan Cooper per Microsoft. Va ser creat per simplificar la programació amb un ambient completament gràfic.

El funcionament del programa es basa en fer realitzar l'experiència de forma continuada amb un capital inicial fins a arribar al objectiu o arribar a 0, i repetir aquest procés el nombre indicat de vegades.

En la pàgina següent es veu un diagrama de flux del funcionament del programa. En aquest esquema una partida significa jugar una vegada a la ruleta (o al joc que sigui) i una prova significa tot el conjunt de partides des de que comença amb un capital inicial predeterminat fins a que arriba al capital objectiu o es queda sense diners.

El diagrama de flux del programa simplifica tot el procés que succeeix en ell. En aquest es veu com el programa realitza un doble bucle. El primer bucle serveix per a realitzar un nombre concret de proves, i el segon, per a simular cada prova, dividint-la en un únic procés que es repeteix. Al programa se l’hi ha afegit un límit de partides de seguretat, perquè, com s’observa al diagrama, en una prova no està predeterminat el nombre de partides que s’hi jugaran.

També farem servir l'excel per tal d'emmagatzemar les dades que anem obtenim i representar-les de forma gràfica.


Inici
Entrada de dades
Ha fet totes
les proves
demanades?
Sí
Mostra el nombre de
proves guanyades
Fi
No
El comptador
de diners es
troba entre 0
i l'objectiu?
Sí
Simula una partida
i suma els guanys o
pèrdues al comptador
de diners
No
Suma 1 al nombre
de proves realitzades
El comptador de
diners és igual
o superior
a l'objectiu?
Sí
Suma 1 al
nombre de
proves guanyades
No
Posa el comptador
de diners igual al capital
definit com a inicial

Primer de tot ens plantegem uns valors de *b*, *c* i *q*, de forma que puguem calcular de forma exacta *B* (no fa falta que sigui càlculs completament exactes, però d'aquesta manera és farà més present la diferència teòrica i pràctica).

Per a tal, primer observarem el cas *b*=1 i *c*=1, en el que el valor de *B* passa a complir:

$$qB^2 - B + 1 - q = 0$$

Equació d'on finalment podem aïllar *B*. Així obtenim que:

$$B = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4q(1-q)}}{2q} = \frac{1 \pm (2q - 1)}{2q}$$

Llavors *B* pot prendre dos valors, però com només busquem aquell que compleix que $0 < B < 1$, i un d'ells és 1, agafarem l'altre, que és $B = \frac{1-q}{q}$.

Així tenim un cas en el podem calcular *B* de forma exacta. Llavors definirem *x*=1. D'aquesta manera podem construir una taula teòrica amb els valors de la probabilitat de guanyar fins a un objectiu, amb diferents valors por a *q* i per a *y*.

Abans, però, recordarem que el valor de la probabilitat de guanyar fins a un objectiu és calcula com:

$$P_{g,y} = 1 - \frac{B^x - B^y}{1 - B^y} = \frac{1 - B^x}{1 - B^y}$$

Com que x=1 i $B = \frac{1-q}{q}$, obtenim que:

$$P_{g,y} = \frac{1 - \frac{1-q}{q}}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^y}$$

I també recordem que la probabilitat de guanyar il·limitadament és calcula com:

$$P_{g.il.} = 1 - B^x = 1 - \frac{1-q}{q} = \frac{2q-1}{q}$$

Llavors la taula dels valors que pren *P* respecte *q* i *y* és com segueix:

*y**q*	0,6	0,7	0,8	0,9
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
4	0,4153	0,5913	0,7529	0,8890
8	0,3468	0,5720	0,7500	0,8889
16	0,3338	0,5714	0,7500	0,8889
32	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
64	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
128	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
256	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
512	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
1024	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
2048	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
4096	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
∞	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889

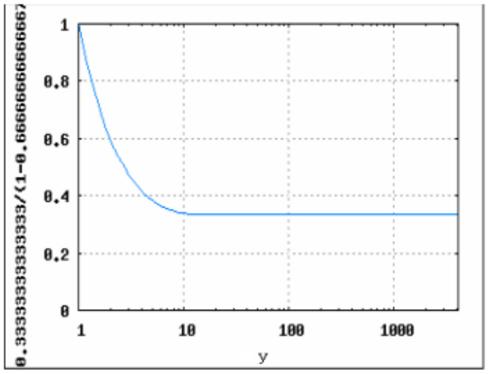
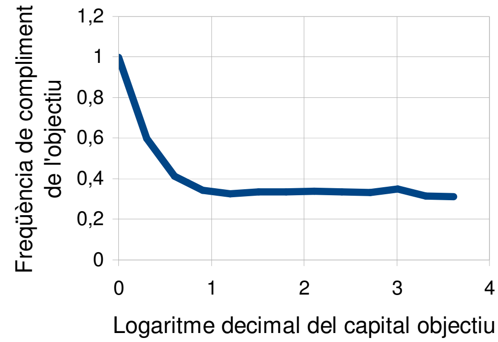
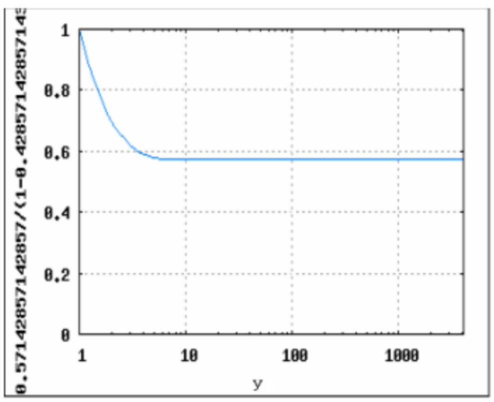
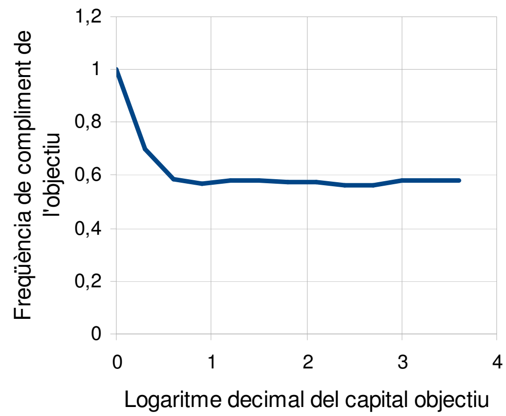
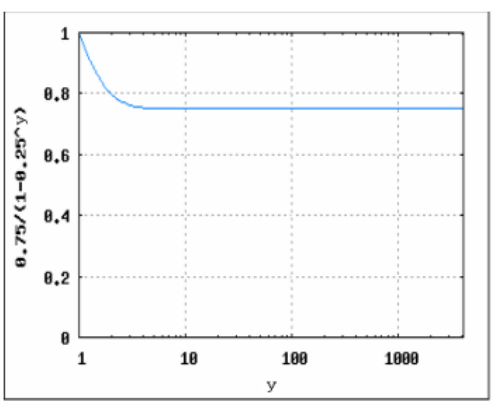
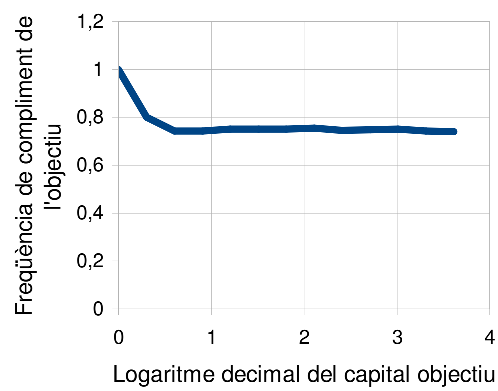
Aquesta taula dóna els valors de les probabilitats que tenim d'arribar a certs capitals objectiu per a jocs en que el nostre benefici al guanyar sigui igual a les nostres pèrdues al perdre, com és el cas de la ruleta apostant a 18 caselles a la vegada.

Aquesta taula la compararem amb els resultats obtinguts pel programa, els valors de les freqüències és donat en la següent taula. Entre parèntesis està el nombre de proves realitzades:

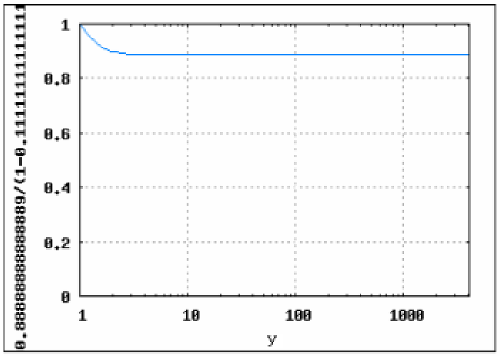
$y \backslash q$	0,6	0,7	0,8	0,9
1	1,0000 (10^6)	1,0000 (10^6)	1,0000 (10^6)	1,0000 (10^6)
2	0,5996 (10^6)	0,7005 (10^6)	0,8000 (10^6)	0,9000 (10^6)
4	0,4109 (10^6)	0,5876 (10^6)	0,7440 (10^6)	0,8867 (10^6)
8	0,3422 (10^5)	0,5668 (10^5)	0,7424 (10^5)	0,8824 (10^5)
16	0,3257 (10^5)	0,5815 (10^5)	0,7518 (10^5)	0,8927 (10^5)
32	0,3356 (10^5)	0,5801 (10^5)	0,7511 (10^5)	0,8855 (10^5)
64	0,3362 (10^4)	0,5753 (10^5)	0,7518 (10^5)	0,8935 (10^4)
128	0,3369 (10^4)	0,5767 (10^4)	0,7545 (10^4)	0,8846 (10^4)
256	0,3349 (10^4)	0,5652 (10^4)	0,7446 (10^4)	0,8878 (10^4)
512	0,3320 (10^3)	0,5658 (10^4)	0,7488 (10^4)	0,8990 (10^3)
1024	0,3490 (10^3)	0,5790 (10^3)	0,7500 (10^3)	0,8880 (10^3)
2048	0,3150 (10^3)	0,5810 (10^3)	0,7420 (10^3)	0,8700 (10^3)
4096	0,3100 (10^3)	0,5780 (10^3)	0,7400 (10^3)	0,8960 (10^3)
∞	----------	----------	----------	----------

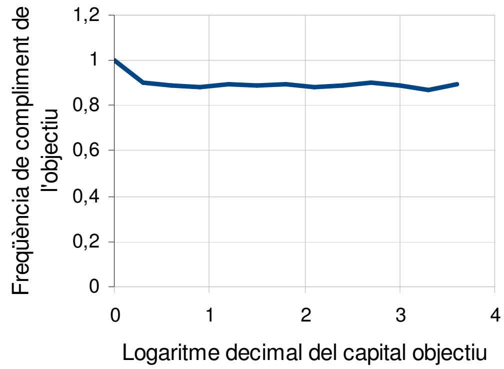
Es veu com els valors estadístics s'apropen molt als teòrics. Com és obvi, amb més proves realitzades, els valors s'apropen més. Els valors d'objectiu infinit no s'han calculat perquè, com és obvi, el programa no té cap forma de distingir els casos en que el capital augmenta de forma il·limitada.

Per a veure que efectivament els valors de probabilitat tendeix a un valor, compararem les gràfiques teòriques amb les que extrèiem dels valors estadístics:

Valors d'x	Gràfica teòrica	Gràfica estadística
x=0,6		
x=0,7		
x=0,8		

x=0,9





Efectivament, les gràfiques tenen la mateixa aparença d'una exponencial amb tendència asimptòtica, que, teòricament l'asímptota és $y = 1 - B^x$. Així podem concloure que l'expressió abans trobada s'ajusta als valors estadístics.

5.10. Conclusions dels resultats estadístics

Com a conclusions podem dir que realment els raonaments teòrics coincideixen amb la realitat, com a mínim pel cas *b*=1 i *c*=1. Però tractant-se la funció de la probabilitat de guanyar fins a un objectiu una funció dependent de 5 variables, podem considerar que si ja s'ajusta per un cas concret amb tanta exactitud és molt possible que s'ajusti per a tots els casos.

6. Mètode de la Martingala

6.1. Sobre la Martingala

Ara deixarem de banda els jocs i passarem a analitzar matemàticament una estratègia general d'apostes. Això vol dir que els raonament que fem aquí són generals per a qualsevol tipus de joc. De fet, els raonaments que ja hem fet amb la ruleta considerant que la nostra aposta era constant es podrien generalitzar d'igual manera a la primitiva i altres jocs.

La Martingala és un mètode d'apostes que s'ha popularitzat molt i que en nombrosos correus "SPAM" es dóna a conèixer com un mètode que assegura els guanys, tot i que això és fals.

La Martingala únicament es pot fer servir en jocs en que el que els beneficis totals al guanyar són iguals a les pèrdues totals al perdre. D'entre tots els jocs que compleixen això n'és un la ruleta apostant a 18 nombres dels 36 (vermell o negre, parell o senar).

La Martingala consisteix en començar apostant amb una quantitat molt petita. Si és perd, doblar la aposta; si es torna a perdre, doblar-la un altre cop, i així fins que es guanyi. Per exemple, si apostem 1€ a que surt cara al llançar una moneda, i surten 3 creus seguides i després cara, les apostes que faríem serien 1-2-4-8, i els guanys finals 16. Per tant, hauríem guanyat 1€. Si ho generalitzem, ràpidament arribem a la conclusió de que els guanys finals seran iguals a la aposta inicial, independentment del nombre d'apostes que fem. Això es veu com, definint *n* com el nombre de vegades que perdem abans de guanyar, tenim que:

$$2^n - (1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1}) = 1$$

I si calculem el valor de la suma geomètrica, tenim que:

$$
\begin{aligned}
&1+2^1+\ldots+2^{n-1}=x\\
&2+\ldots+2^n=2x\\
&x=2^n-1
\end{aligned}
$$

Cosa que, al substituir-ho en l'expressió anterior ens la confirma per a tot *n* natural.

La Martingala, però, posseeix un punt en contra, que és que els guanys són molt inferiors als valors als que poden arribar les apostes. Aquest fet és el que podria provocar que el mite sigui fals.

6.2. Probabilitat d'obtenir un nombre de guanys a partir del capital inicial

Ara intentarem trobar alguna forma de calcular la probabilitat d'arribar a un objectiu, marcat pels guanys que rebem i el capital inicial que tenim:

D'aquesta manera, la probabilitat de guanyar com a mínim 1 d'*n* apostes és de:

$$P=1-(1-a)^n$$

On *a* és la probabilitat de guanyar una partida.

Però *n* ha de ser un nombre natural definit pel capital disponible. Si definim el capital disponible com la suma del capital inicial *N* més els guanys obtinguts fins a aquell moment *G*, llavors la suma de les *n* apostes que podem suportar serà inferior o igual a *N*+*G*. Per tant:

$$1+2+\ldots+2^{n-1}\le G+N$$

Com ja hem demostrat abans, la suma geomètrica $1+2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$, llavors tenim que:

$$2^n-1\le G+N$$

$$n \le \log_2(G+N+1)$$

Cal remarcar que el fet que perdéssim totes les apostes no implicaria quedar-nos sense gens de capital, però si que no podríem seguir amb el doble de l'aposta anterior, i per tant el mètode de la Martingala hauria fracassat.

L'expressió anterior ens dóna diverses solucions, de les quals només escollirem el valor més gran. Per tant agafarem el valor natural just inferior del logaritme, que és la seva part entera.

$$n = E(\log_2(G+N+1))$$

On $E(x)$ és una funció que torna la part entera (no decimal) de x. (De la mateixa manera que $E(\ln 5) = 1$ i $E(\sqrt{2}) = 1$)

Llavors la probabilitat de guanyar una partida abans de perdre-ho tot quan tens G guanys és de:

$$P_G = 1-(1-a)^{E(\log_2(G+N+1))}$$

Però com que no hem de guanyar només una partida, sinó totes les partides des de que G=0 fins a G=G_{max} –1, definint G_{max} com el nombre de guanys objectiu, (i ja que una vegada es supera per G_{max} -1, el capital que és té és G_{max}) és de:

$$P_f = \prod_{i=0}^{G_{\max}-1} P_G = \prod_{i=0}^{G_{\max}-1} \left[1-(1-a)^{E(\log_2(i+N+1))}\right]$$

Que també es pot expressar com:

$$P_f = \prod_{i=N+1}^{G_{\max}+N} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]$$

6.3. Probabilitat de guanyar il·limitadament

Per a calcular la probabilitat de guanyar il·limitadament en aquest cas, el límit per quan G_{max} tendeix a infinit (ja que G_{max} és el nostre objectiu) ens deixa un producte infinit, que a més conté una funció de valor enter:

$$P_{G_{max}\to+\infty} = \lim_{G_{max}\to+\infty} \prod_{i=N+1}^{G_{max}+N} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right] = \prod_{i=N+1}^{\infty} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]$$

Aquesta expressió la podem desenvolupar com:

$$\prod_{i=N+1}^{\infty} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right] = \frac{\prod_{i=2}^{\infty} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]}{\prod_{i=2}^{N} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]}$$

Aquesta expressió és obvia per a tot *N*>1. En el cas de *N*=1, com a convenció direm que el denominador val 1, ja que, com és obvi $\prod_{i=2}^{\infty} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right] = \prod_{i=2}^{\infty} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]$.

Amb aquesta propietat obvia ens demostra que podem trobar el valor de la probabilitat de guanyar il·limitadament si únicament calculem el producte infinit $\prod_{i=2}^{\infty} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]$.

Per a desenvolupar aquest producte definirem:

$$f(x) = 1-(1-a)^{E(\log_2 x)}$$

Per tant:

$$\prod_{i=2}^{\infty} \left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right] = \prod_{i=2}^{\infty} f(i)$$

Però si definim k com el nombre natural que compleix que $2^k \leq x < 2^{k+1}$:

$$f(x) = 1 - (1-a)^k$$

I llavors tenim que per a tot x que compleix que $2^k \leq x < 2^{k+1}$ el valor de $f(x)$ és invariable. Per tant, hi ha $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ termes que tenen com a valor $f(x) = 1 - (1-a)^k$. D'aquesta manera, el producte de d'aquests termes serà:

$$\prod_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} f(i) = \prod_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \left[1 - (1-a)^{E(\log_2 i)}\right] = \left[1 - (1-a)^k\right]^{2^k}$$

Però si recordem que x en el producte $\prod_{x=2}^{\infty} f(x)$ pren valors des de 2 fins a infinit, tindrem que k pren valors des d'1 fins a infinit. Això es dóna perquè el menor k compleix que $2^k \leq 2 < 2^{k+1}$, i si n'extraiem el valor natural de k de l'expressió obtenim que és 1. Així, tenim de forma simplificada el producte infinit:

$$\prod_{i=2}^{\infty} \left[1 - (1-a)^{E(\log_2 i)}\right] = \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - (1-a)^k\right]^{2^k}$$

6.4. Demostració de que amb esperança no positiva la probabilitat de guanyar il·limitadament és nul·la

Com ja hem explicat abans, aquest producte està relacionat amb la probabilitat de guanyar il·limitadament amb un capital inicial N com:

$$\prod_{i=N+1}^{\infty} \left[1 - (1-a)^{E(\log_2 i)}\right] = \frac{\prod_{i=2}^{\infty} \left[1 - (1-a)^{E(\log_2 i)}\right]}{\prod_{i=2}^{N} \left[1 - (1-a)^{E(\log_2 i)}\right]} = \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - (1-a)^k\right]^{2^k}}{\prod_{i=2}^{N} \left[1 - (1-a)^{E(\log_2 i)}\right]}$$

Com es veu fàcilment, el denominador és un valor concret (denominador que pren el valor d'1 en cas de que N=1, recordant la convenció que abans hem acordat). Per tant, per a que la probabilitat de guanyar il·limitadament tingui un valor diferent de 0, el numerador ha de ser diferent de 0.

Per a que aquest valor de $\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k}$ pugui ser diferent de 0 o d'infinit, el valor de $\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k}$ ha de tendir a 1. Fixem-nos que aquesta condició no implica que si $\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k}$ tendeix a 1, $\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k}$ tindrà un valor diferent de 0 o infinit. Aquesta propietat es demostra de la propietat de que si $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ té un valor diferent d'infinit, llavors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Tot això es compleix sempre i quan cap valor de $\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k}$ sigui igual a 0. Llavors hem de comprovar que:

$$\lim_{k\to+\infty}\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k} = 1$$

i que:

$$\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k} \neq 0 \text{ , per a tot } k \text{ natural}$$

Primer demostrarem la segona expressió. Per a fer-ho mirarem en quins valors és l'expressió igual a 0:

$$\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k} = 0$$

Per a que un producte sigui igual a 0, un dels factors que el componen té que ser igual a 0. Com que en aquest cas només hi ha un factor, aquest té que ser igual a 0, per tant:

$$1-(1-a)^k = 0$$

I d'aquí deduïm que:

$$k = 0$$

Això té una excepció, que és quan *a*=0, quan $1-1^k = 0$ es compleix per tot *k*. Però com que quan *a*=0, llavors és obvi que no hi ha cap possibilitat de guanyar il·limitadament, si ja de fet no hi ha cap possibilitat de guanyar una sola partida. O sigui que menys aquest cas que no ens interessa, l'únic valor de *k* que no ens es permès que estigués al producte es troba fora dels naturals.

Ens queda demostrar que el límit de l'expressió tendeix a 1. Això ho veurem a continuació:

$$\lim_{k\to+\infty}\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k} = 1$$

Es fàcil veure que aquesta expressió és igual a la següent:

$$\lim_{k\to+\infty}\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k} = \lim_{k\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{-1}{(1-a)^k}}\right]^{2^k\frac{-(1-a)^k}{-(1-a)^k}} = 1$$

Fent servir que $e = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ i que $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{(1-a)^k} = -\infty$ ja que *a* és un valor de probabilitat, i per tant és positiu i inferior a 1. (El cas *a*=0, com ja hem dit abans, és un cas simple que no ens interessa.)

$$\lim_{k\to+\infty}\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k} = e^{\lim_{k\to+\infty} -2^k(1-a)^k} = 1$$

Si ara apliquem el logaritme neperià a l'última igualtat, obtindrem que:

$$\lim_{k\to+\infty} -2^k(1-a)^k = 0$$

D'on deduïm que:

$$\lim_{k\to+\infty}\left[2(1-a)\right]^k = 0$$

Però una exponencial només tendeix a 0 si la base és menor que 1 i superior a -1. Llavors tenim la inequació següent:

$$-1 < 2(1-a) < 1$$

D'on ràpidament deduïm que:

$$\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$$

Però com que *a* és una probabilitat, llavors a només podrà estar dins del següent interval:

$$\frac{1}{2} < a \leq 1$$

Fixem-nos que aquests valors són els valors corresponents a una esperança matemàtica positiva. Així, sent *g* l'aposta en un moment puntual, l'esperança *Esp* és:

$$Esp = ag - (1-a)g$$

Ja que, com hem definit abans, la martingala només serveix per jocs on els beneficis totals al guanyar són iguals a les pèrdues totals al perdre. Així, si considerem l'esperança positiva, obtenim:

$$Esp = ag - g + ag > 0$$

$$a > \frac{1}{2}$$

El fet que la martingala només té possibilitats de fer-nos servei (ja que la demostració que hem donat no implica que el producte infinit hagi de tendir a un nombre diferent de 0 per a esperances positives) per a poder jugar il·limitadament per a esperances positives implica que totes les llegendes urbanes de que aquest mètode permet obtenir contínuament beneficis de jocs de casino com la ruleta són falsos. De tota forma, tot i que ja hem desmentit el mite, seguirem estudiant l'estratègia, per si en algun cas d'esperança positiva ens pogués fer servei.

6.5. Demostració que amb esperança positiva la probabilitat de guanyar il·limitadament no és nul·la

Per a demostrar que la probabilitat de guanyar il·limitadament és estrictament superior a 0 quan l'esperança és positiva, o el que és el mateix, que $\prod_{k=1}^{n}\left[1-(1-a)^{k}\right]^{2^k}$ no tendeix a 0 quan *n* tendeix a infinit, el que farem és intentar acotar l'expressió. Per a tal definirem la funció *g*(*k*) com:

$$g(k)=2^{k}\ln\left[1-(1-a)^{k}\right]$$

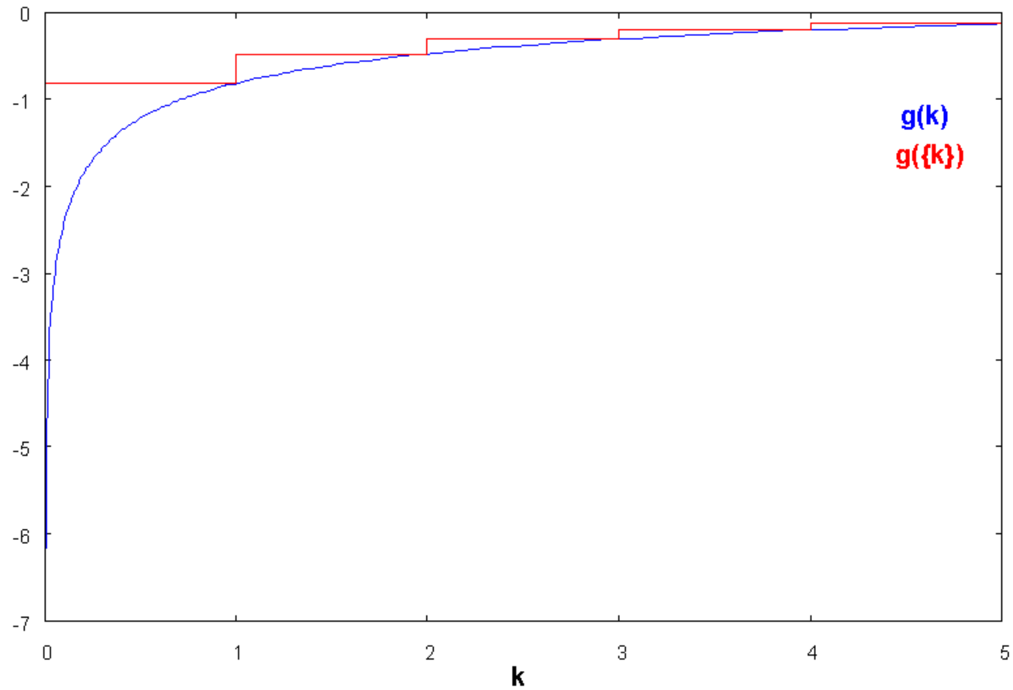
És fàcil observar que aquesta expressió compleix que:

$$\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left[1-(1-a)^{k}\right]^{2^k}\right]=\sum_{k=1}^{n}g(k)$$

Per tant, el que hem de demostrar és que $\sum_{k=1}^{n}g(k)$ no tendeix a menys infinit, és a dir, que convergeix.

Per a aconseguir tal objectiu agafarem la cota inferior $\sum_{k=1}^{\infty}g(k)>\int_{1}^{\infty}g(k)dk+g(1)$.
La desigualtat anterior es prova de forma gràfica amb el gràfic que hi ha a continuació. La desigualtat es refereix a les àrees que es veuen en la figura, ja que, considerant $\sum_{k=1}^{\infty}g(k)=\int_{0}^{\infty}g(\{k\})$ on $\{k\}$ indica el valor de la part entera de *k*, l'àrea per damunt la funció $g(\{k\})$ és menor que la que hi ha per damunt de la de la gràfica contínua.

Però per a poder aplicar això, s'han de complir uns requisits. Aquesta cota només val per a funciones monòtones creixents que en tot l'interval tenen valors negatius. Tot i que el fet que en tot l'interval valors negatius és clar, encara tenim que demostrar que és monòtona creixent.



6.5.1. Demostració que g(k) és monòtona creixent en l'interval $(1, \infty)$

Per a veure que efectivament g(k) és monòtona creixent en tot l'interval $(1, \infty)$, prendrem la derivada de la funció g(k).

$$g'(k) = 2^k \ln 2 \ln(1-(1-a)^k) - 2^k \frac{(1-a)^k \ln(1-a)}{1-(1-a)^k}$$

Ara bé, si partim de que $\frac{1}{2} < a$, podem deduir fàcilment que $\ln(1-a) < -\ln 2$. Per tant, si multipliquem per -1 i canviem el signe, i multipliquem a banda i banda per $\frac{2^k(1-a)^k}{1-(1-a)^k}$ i després i sumem $2^k \ln 2 \ln(1-(1-a)^k)$, obtenim que:

$$g'(k) = 2^k \ln 2 \ln(1-(1-a)^k) - 2^k \frac{(1-a)^k \ln(1-a)}{1-(1-a)^k} > 2^k \ln 2 \left[\ln(1-(1-a)^k) + \frac{(1-a)^k}{1-(1-a)^k} \right]$$

Encara ens queda veure si efectivament aquesta expressió és superior a 0. Per a això definirem la funció $h(k) = \ln(1-(1-a)^k) + \frac{(1-a)^k}{1-(1-a)^k}$, que és lo que es correspon amb l'expressió a l'interior dels claudàtors. Com que $h(k)$ compleix que $g'(k) > 2^k \ln 2 h(k)$, i $2^k \ln 2 > 0$ per tot *k*, llavors hem de provar que $h(k) > 0$ en el mateix interval (1, ∞).

Però $h(k) > 0$ també es pot escriure com:

$$\ln(1-(1-a)^k) + \frac{(1-a)^k}{1-(1-a)^k} > 0$$

$$\frac{1}{1-(1-a)^k} - 1 > \ln\left(\frac{1}{1-(1-a)^k}\right)$$

Ara bé, si considerem la funció $\ln x$, aquesta funció té com a recta tangent al punt x=1 la recta $y = x - 1$. Al ser el $\ln x$ convergent en tot el domini, llavors la recta tangent és, en tot punt del domini, superior o igual al valor de la funció, és a dir, $x - 1 \geq \ln x$ per tot x enter positiu, amb el cas d'igualtat en x=1.

Per tant la desigualtat $\frac{1}{1-(1-a)^k} - 1 > \ln\left(\frac{1}{1-(1-a)^k}\right)$ es donarà sempre excepte en el cas $\frac{1}{1-(1-a)^k} = 1$, que implica que

$$(1-a)^k = 0$$

Amb el cas d'igualtat per tant en a=1.

I com tenim que $h(k) \geq 0$ i que $g'(k) > 2^k \ln 2 h(k)$, obtenim que $g'(k) > 0$ en l'interval (1, ∞).

6.5.2. Recerca d'una cota inferior

Prenent l'expressió de l'apartat 6.5. $\sum_{k=1}^{\infty} g(k) > \int_1^{\infty} g(k)dk + g(1)$ intentarem desenvolupar-la fins a trobar una cota inferior que ens asseguri la convergència del sumatori. Per a tal, intentarem trobar la integral de $g(k)$ entre 1 i ∞.

Primer de tot, si apliquem el mètode d'integració per parts, obtenim que:

$$\int_1^{\infty} 2^k \ln\left[1-(1-a)^k\right]dk = \left[\frac{1}{\ln 2}2^k \ln\left[1-(1-a)^k\right]\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \frac{1}{\ln 2}2^k \frac{(1-a)^k \ln(1-a)}{1-(1-a)^k}dk$$

Si ara ens fixem, a l'apartat 6.4 ja hem calculat el límit $\lim_{k\to+\infty}\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k}$ i hem obtingut que era 1. Per tant $\lim_{k\to+\infty} 2^k \ln\left[1-(1-a)^k\right]=0$. D'aquesta forma obtenim que:

$$\int_1^{\infty} 2^k \ln\left[1-(1-a)^k\right]dk = \frac{-2\ln a}{\ln 2} + \frac{\ln(1-a)}{\ln 2}\int_1^{\infty} \frac{\left[2(1-a)\right]^k}{1-(1-a)^k}dk$$

Ara bé, aquesta cota ens és inservible mentre no puguem calcular la integral $\int_1^{\infty} \frac{\left[2(1-a)\right]^k}{1-(1-a)^k}dk$. Per a poder fer-ne ús el que farem serà trobar una cota inferior d'aquesta integral. Així, tot partint de que l'esperança és positiva i la probabilitat és, per tant, estrictament superior a $\frac{1}{2}$ obtenim que:

$$a > \frac{1}{2}$$

$$(1-a)^k < \frac{1}{2} \text{ (amb } k \geq 1\text{)}$$

$$\frac{\left[2(1-a)\right]^k}{1-(1-a)^k} < \frac{\left[2(1-a)\right]^k}{1/2}$$

Com això val per tota $k \geq 1$, si això ho prenem com dues funcions que depenen de *k*, la seva integral en l'interval des d'1 fins a l'infinit complirà la mateixa relació, ja que cada un dels punts la compleix. Per tant:

$$\int_1^{\infty} \frac{\left[2(1-a)\right]^k}{1-(1-a)^k}dk < \int_1^{\infty} \frac{\left[2(1-a)\right]^k}{1/2}dk$$

Si ara multipliquem per $\frac{\ln(1-a)}{\ln 2}$, com $(1-a)$ és inferior a 1, i per tant el seu logaritme negatiu, la expressió resultant tindrà el signe oposat, és a dir:

$$\frac{\ln(1-a)}{\ln 2}\int_1^{\infty}\frac{[2(1-a)]^k}{1-(1-a)^k}dk > \frac{\ln(1-a)}{\ln 2}\int_1^{\infty}\frac{[2(1-a)]^k}{1/2}dk$$

Que ens serveix per acotar l'expressió anterior de $\int_1^{\infty}2^k\ln\left[1-(1-a)^k\right]dk$. Així obtenim que:

$$\int_1^{\infty}2^k\ln\left[1-(1-a)^k\right]dk = \frac{-2\ln a}{\ln 2}+\frac{\ln(1-a)}{\ln 2}\int_1^{\infty}\frac{[2(1-a)]^k}{1-(1-a)^k}dk > \frac{-2\ln a}{\ln 2}+\frac{\ln(1-a)}{\ln 2}\int_1^{\infty}\frac{[2(1-a)]^k}{1/2}dk$$

Calculant la integral:

$$\int_1^{\infty}\frac{[2(1-a)]^k}{1/2}dk = \left[\frac{2[2(1-a)]^k}{\ln[2(1-a)]}\right]_1^{\infty}$$

Sabent que $a > \frac{1}{2}$, i per tant $2(1-a) < 1$, llavors trobem que:

$$\int_1^{\infty}\frac{[2(1-a)]^k}{1/2}dk = \frac{-4(1-a)}{\ln[2(1-a)]}$$

Això té un valor indefinit per a=1, però com és un cas on l'estudi es torna trivial, ja que sempre guanyem cada partida, i per tant la probabilitat de guanyar il·limitadament és 1, no li donarem importància.

Per tant, ara que hem desfet les integrals definides, hem obtingut una cota inferior de la probabilitat de guanyar il·limitadament, que, recollint tot el que hem explicat fins ara és

$$\sum_{k=1}^{\infty}g(k) > \int_1^{\infty}g(k)dk+g(1) > \frac{-2\ln a}{\ln 2}+\frac{\ln(1-a)}{\ln 2}\int_1^{\infty}\frac{[2(1-a)]^k}{1/2}dk+g(1) = \frac{-2\ln a}{\ln 2}-\frac{\ln(1-a)}{\ln 2}\frac{4(1-a)}{\ln[2(1-a)]}+g(1)$$

$$\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left[1-(1-a)^k\right]^{2^k}\right] > \frac{-2\ln a}{\ln 2}-\frac{\ln(1-a)}{\ln 2}\frac{4(1-a)}{\ln[2(1-a)]}+2\ln a$$

Per tant, com existeix una cota inferior, la probabilitat de guanyar il·limitadament serà diferent de 0 per tot valor que compleixi que l'esperança és positiva.

6.6. Conclusions dels resultats teòrics

Recollint tot el que s'ha demostrat fins ara podem dir que la martingala és un tipus d'estratègia la qual no permet, tal i com el mite assegura, obtenir beneficis de la ruleta tot i que l'esperança matemàtica estigui en contra teva. Però això no vol dir que sigui impossible obtenir-ne quan l'esperança és positiva, al contrari, amb esperança positiva es té una probabilitat de guanyar il·limitadament diferent de 0.

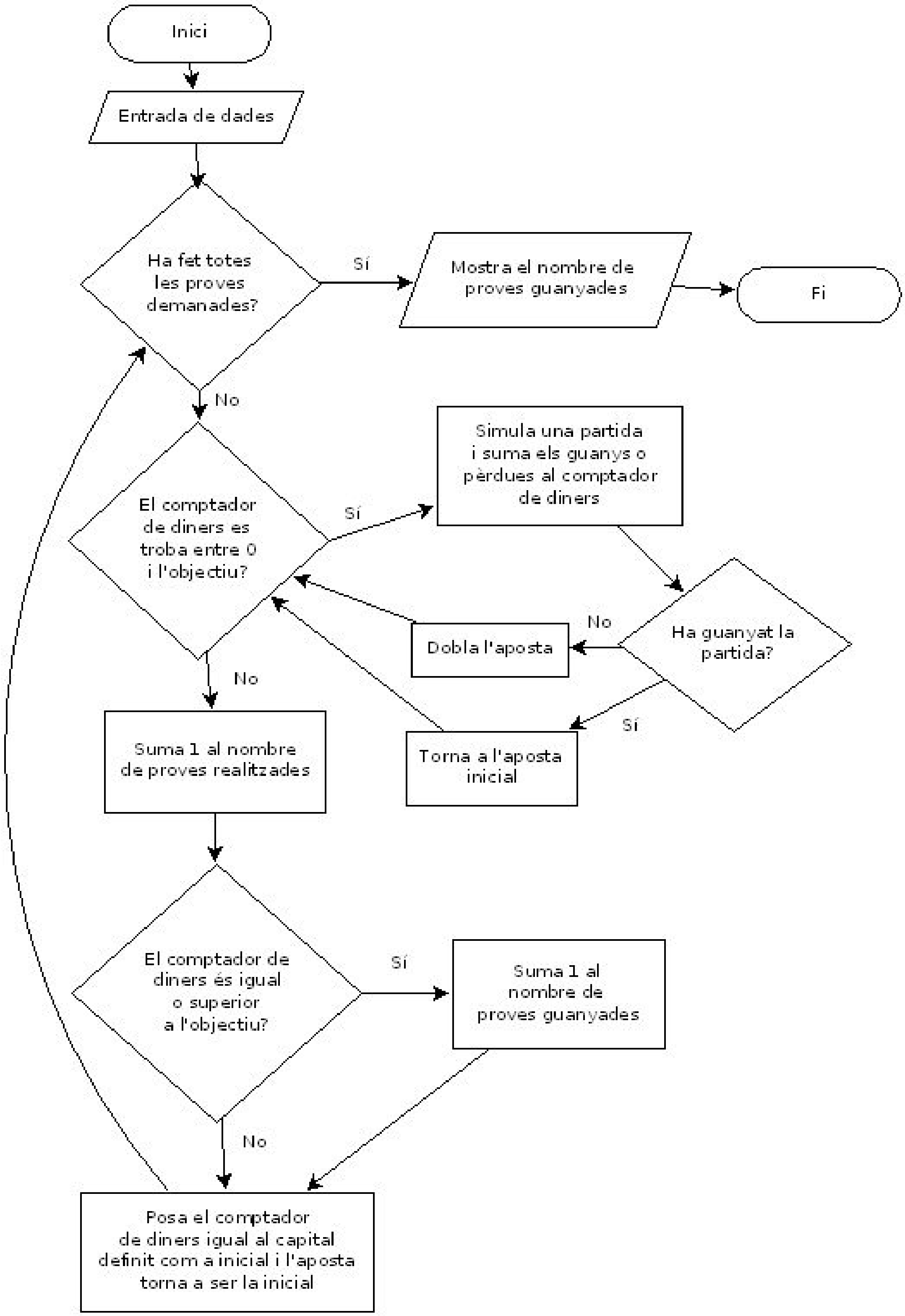
6.7. Comprovació estadística de l’estratègia de la Martingala

Tot i que ja hem demostrat estadísticament que la Martingala sembla tenir una probabilitat de guanyar il·limitadament diferent de 0, com que tota la resta del procés deductiu de la Martingala ha sigut llarg i laboriós, el comprovarem mitjançant unes proves estadístiques, tal i com ja vam fer amb el mètode de l'aposta constant.

Per a comparar resultats teòrics i reals farem servir un programa informàtic, tal i com vam fer en l'altre cas. De fet el programa és el mateix amb petites modificacions. Es poden comparar codis fonts als annexos. El diagrama de flux del programa es troba a la pàgina següent

El diagrama de flux és molt semblant al del cas de l’aposta constant, amb la diferència que s’ha modificat el segon bucle per tal que l’aposta varïi.

Com l'altre vegada farem servir l'excel per a construir les gràfiques a partir de les dades estadístiques.


Inici
Entrada de dades
Ha fet totes les proves demanades?
Sí
Mostra el nombre de proves guanyades
Fi
No
El comptador de diners es troba entre 0 i l'objectiu?
Sí
Simula una partida i suma els guanys o pèrdues al comptador de diners
Ha guanyat la partida?
No
Dobla l'aposta
Sí
Torna a l'aposta inicial
No
Suma 1 al nombre de proves realitzades
El comptador de diners és igual o superior a l'objectiu?
Sí
Suma 1 al nombre de proves guanyades
No
Posa el comptador de diners igual al capital definit com a inicial i l'aposta torna a ser la inicial

Primer de tot plantegem per quins valors farem els càlculs. Com volem introduir aquests valors en l'expressió $\prod_{i=N+1}^{G_{\max}+N}\left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]$ de forma que quedi un producte el més senzill possible, plantegem que *N*=1 i que $G_{\max}=2^{n+1}-2$ per a *m*'s natural. Així tenim que:

$$\prod_{i=2}^{2^{n+1}-1}\left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]$$

Com ja hem vist en l'apartat anterior, podem agrupar els termes els quals donin a l'expressió $\left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]$ el mateix valor. Així tenim que per $2^k \le x < 2^{k+1}$ l'expressió val el mateix, i que es repeteix 2^k vegades. Això ens dóna un total d'*n* factors diferents, i el producte s'expressa com:

$$\prod_{i=2}^{2^{n+1}-1}\left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]=\prod_{i=2}^{3}\left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]\prod_{i=4}^{7}\left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]..\prod_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\left[1-(1-a)^{E(\log_2 i)}\right]=$$

$$\prod_{i=2}^{3}\left[1-(1-a)^{1}\right]\prod_{i=4}^{7}\left[1-(1-a)^{2}\right]...\prod_{i=2^n}^{2^{n+1}-1}\left[1-(1-a)^{k}\right]=\left[1-(1-a)^{1}\right]^{2}\left[1-(1-a)^{1}\right]^{4}...\left[1-(1-a)^{1}\right]^{2^n}=$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left[1-(1-a)^{k}\right]^{2^k}$$

Ara agafarem diferents valors d'*a* i compararem les taules i gràfiques estadístiques obtingudes a partir dels resultats del programa amb les taules i gràfiques teòriques.

Resultats teòrics:

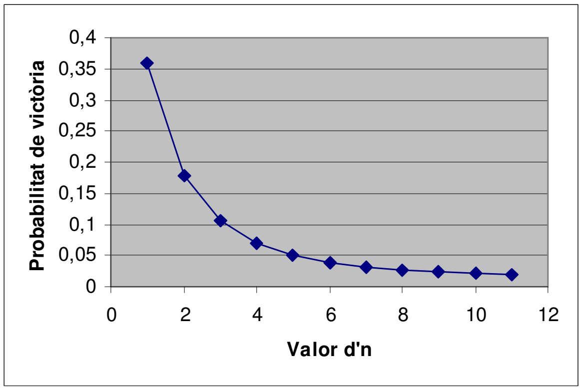
n [G_{max}+N]\a	0,6	0,7	0,8	0,9
1 [3]	$3{,}600\cdot10^{-1}$	$4{,}900\cdot10^{-1}$	$6{,}400\cdot10^{-1}$	$8{,}100\cdot10^{-1}$
2 [7]	$1{,}792\cdot10^{-1}$	$3{,}360\cdot10^{-1}$	$5{,}436\cdot10^{-1}$	$7{,}781\cdot10^{-1}$
3 [15]	$1{,}056\cdot10^{-1}$	$2{,}699\cdot10^{-1}$	$5{,}098\cdot10^{-1}$	$7{,}719\cdot10^{-1}$
4 [31]	$6{,}973\cdot10^{-2}$	$2{,}370\cdot10^{-1}$	$4{,}969\cdot10^{-1}$	$7{,}706\cdot10^{-1}$
5 [63]	$5{,}016\cdot10^{-2}$	$2{,}192\cdot10^{-1}$	$4{,}918\cdot10^{-1}$	$7{,}704\cdot10^{-1}$
6 [127]	$3{,}857\cdot10^{-2}$	$2{,}093\cdot10^{-1}$	$4{,}898\cdot10^{-1}$	$7{,}703\cdot10^{-1}$
7 [255]	$3{,}127\cdot10^{-2}$	$2{,}035\cdot10^{-1}$	$4{,}890\cdot10^{-1}$	$7{,}703\cdot10^{-1}$
8 [511]	$2{,}644\cdot10^{-2}$	$2{,}001\cdot10^{-1}$	$4{,}887\cdot10^{-1}$	$7{,}703\cdot10^{-1}$
9 [1023]	$2{,}312\cdot10^{-2}$	$1{,}981\cdot10^{-1}$	$4{,}885\cdot10^{-1}$	$7{,}703\cdot10^{-1}$
10 [2047]	$2{,}076\cdot10^{-2}$	$1{,}969\cdot10^{-1}$	$4{,}885\cdot10^{-1}$	$7{,}703\cdot10^{-1}$
11 [4095]	$1{,}906\cdot10^{-2}$	$1{,}962\cdot10^{-1}$	$4{,}885\cdot10^{-1}$	$7{,}703\cdot10^{-1}$

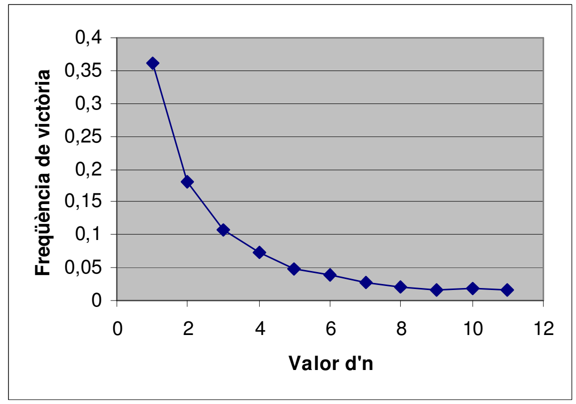
Resultats estadístics:

m [G_{max}+N]\a	0,6	0,7	0,8	0,9
1 [3]	$3{,}612\cdot10^{-1}$ (10^6)	$4{,}908\cdot10^{-1}$ (10^6)	$6{,}401\cdot10^{-1}$ (10^6)	$8{,}097\cdot10^{-1}$ (10^6)
2 [7]	$1{,}806\cdot10^{-1}$ (10^6)	$3{,}404\cdot10^{-1}$ (10^6)	$5{,}458\cdot10^{-1}$ (10^6)	$7{,}782\cdot10^{-1}$ (10^6)
3 [15]	$1{,}066\cdot10^{-1}$ (10^6)	$2{,}642\cdot10^{-1}$ (10^6)	$5{,}136\cdot10^{-1}$ (10^6)	$7{,}701\cdot10^{-1}$ (10^6)
4 [31]	$7{,}222\cdot10^{-2}$ (10^6)	$2{,}164\cdot10^{-1}$ (10^6)	$5{,}166\cdot10^{-1}$ (10^6)	$7{,}637\cdot10^{-1}$ (10^6)
5 [63]	$4{,}753\cdot10^{-2}$ (10^5)	$1{,}906\cdot10^{-1}$ (10^6)	$4{,}564\cdot10^{-1}$ (10^5)	$7{,}768\cdot10^{-1}$ (10^5)
6 [127]	$3{,}941\cdot10^{-2}$ (10^5)	$1{,}459\cdot10^{-1}$ (10^6)	$4{,}499\cdot10^{-1}$ (10^5)	$7{,}708\cdot10^{-1}$ (10^5)
7 [255]	$2{,}668\cdot10^{-2}$ (10^5)	$1{,}604\cdot10^{-1}$ (10^5)	$5{,}011\cdot10^{-1}$ (10^5)	$7{,}656\cdot10^{-1}$ (10^5)
8 [511]	$1{,}968\cdot10^{-2}$ (10^5)	$1{,}841\cdot10^{-1}$ (10^5)	$4{,}634\cdot10^{-1}$ (10^5)	$7{,}764\cdot10^{-1}$ (10^4)
9 [1023]	$1{,}604\cdot10^{-2}$ (10^5)	$1{,}784\cdot10^{-1}$ (10^5)	$4{,}964\cdot10^{-1}$ (10^5)	$7{,}596\cdot10^{-1}$ (10^4)
10 [2047]	$1{,}776\cdot10^{-2}$ (10^5)	$1{,}605\cdot10^{-1}$ (10^5)	$5{,}018\cdot10^{-1}$ (10^4)	$7{,}612\cdot10^{-1}$ (10^4)
11 [4095]	$1{,}611\cdot10^{-2}$ (10^5)	$1{,}681\cdot10^{-1}$ (10^4)	$4{,}949\cdot10^{-1}$ (10^4)	$7{,}778\cdot10^{-1}$ (10^4)

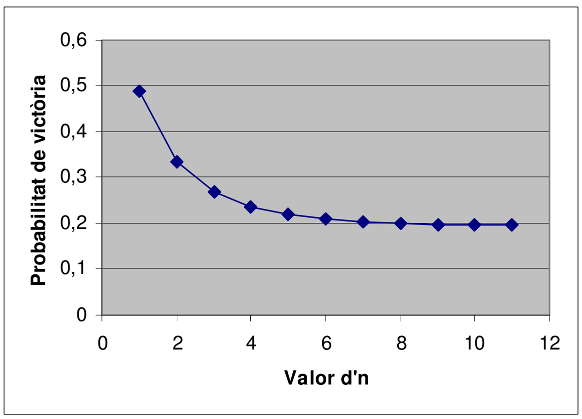
Valors d'x	Gràfica teòrica	Gràfica estadística

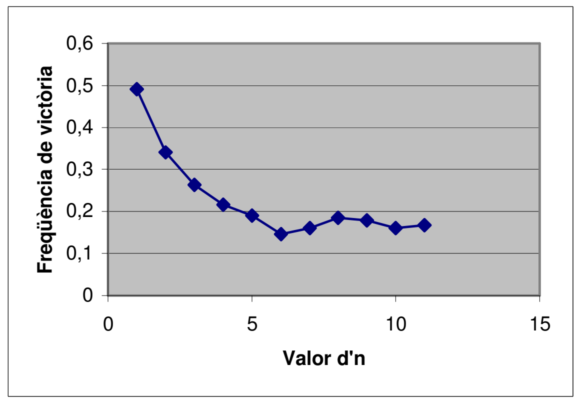
x=0,6



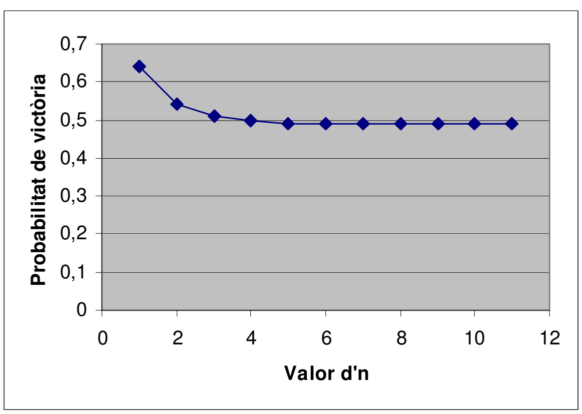


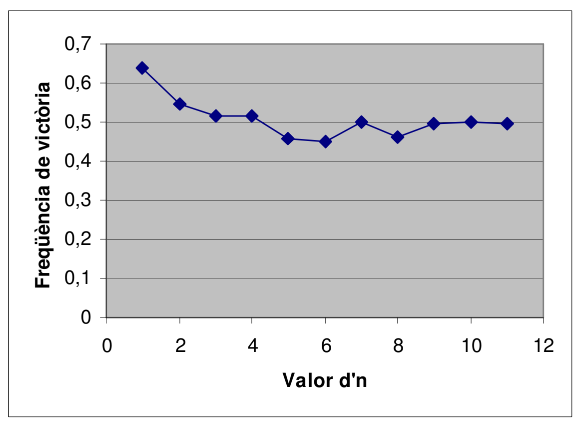
x=0,7



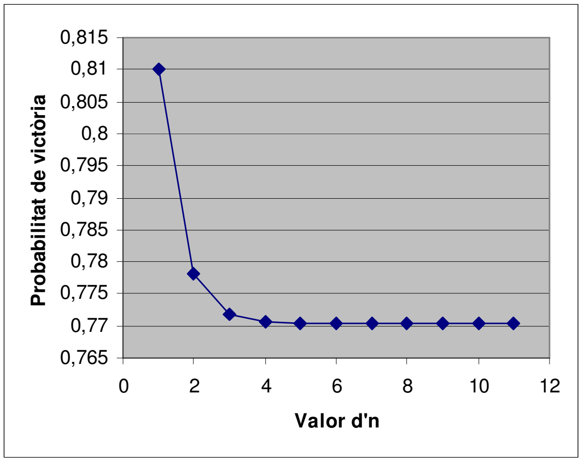


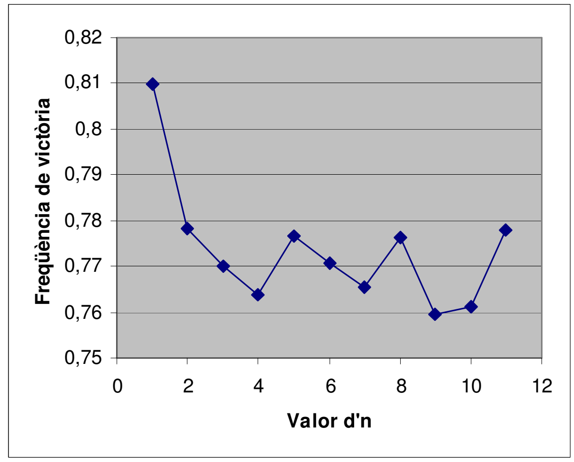
x=0,8





x=0,9





Tot i la gran variabilitat dels resultats, es mostra clarament com la gràfica dels valors estadístics s'aproxima molt a la gràfica teòrica. Amb això comprovem els càlculs que hem fet sobre la Martingala i els nostres resultats.

6.8. Conclusions dels resultats estadístics

Podem assegurar que la Martingala és un mètode d'apostes que permet tenir beneficis de forma il·limitada si, com en el cas de l'aposta constant, la nostra esperança matemàtica és positiva. Podem dir també que el nostre model teòric s'aproxima de forma molt exacta a la realitat.

7. Comparació de les estratègies de l'aposta constant i la Martingala

Ara que hem estudiat les dues estratègies compararem resultats. Ho farem de forma gràfica, ja que les expressions que hem trobat són massa complexes i fer-ne un estudi exacte seria massa laboriós.

Cal recordar que la Martingala només es pot fer servir per casos en que els beneficis totals al guanyar una partida són iguals a les pèrdues totals al perdre una partida. Això implica que només podrem estudiar el cas de l'aposta constant en que, fent servir la nomenclatura de l'apartat de la ruleta, b=c=1 "aposta".

Llavors ens disposem a estudiar els dos casos. Per a això agafarem les taules teòriques dels apartats de comprovacions (ja que en l'apartat de comprovació de l'aposta constant el cas que vam fer servir era precisament el per a b=c=1 "aposta") que donaven el valor de la probabilitat d'obtenir un cert objectiu amb capital inicial 1 "aposta" i les compararem:

De l'aposta constant:

$y \backslash q$	0,6	0,7	0,8	0,9
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0,6000	0,7000	0,8000	0,9000
4	0,4153	0,5913	0,7529	0,8890
8	0,3468	0,5720	0,7500	0,8889
16	0,3338	0,5714	0,7500	0,8889
32	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
64	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
128	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
256	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
512	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
1024	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889

2048	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889
4096	0,3333	0,5714	0,7500	0,8889

De la Martingala:

n [G_{max}+N]\\a	0,6	0,7	0,8	0,9
1 [3]	$3{,}600\cdot 10^{-1}$	$4{,}900\cdot 10^{-1}$	$6{,}400\cdot 10^{-1}$	$8{,}100\cdot 10^{-1}$
2 [7]	$1{,}792\cdot 10^{-1}$	$3{,}360\cdot 10^{-1}$	$5{,}436\cdot 10^{-1}$	$7{,}781\cdot 10^{-1}$
3 [15]	$1{,}056\cdot 10^{-1}$	$2{,}699\cdot 10^{-1}$	$5{,}098\cdot 10^{-1}$	$7{,}719\cdot 10^{-1}$
4 [31]	$6{,}973\cdot 10^{-2}$	$2{,}370\cdot 10^{-1}$	$4{,}969\cdot 10^{-1}$	$7{,}706\cdot 10^{-1}$
5 [63]	$5{,}016\cdot 10^{-2}$	$2{,}192\cdot 10^{-1}$	$4{,}918\cdot 10^{-1}$	$7{,}704\cdot 10^{-1}$
6 [127]	$3{,}857\cdot 10^{-2}$	$2{,}093\cdot 10^{-1}$	$4{,}898\cdot 10^{-1}$	$7{,}703\cdot 10^{-1}$
7 [255]	$3{,}127\cdot 10^{-2}$	$2{,}035\cdot 10^{-1}$	$4{,}890\cdot 10^{-1}$	$7{,}703\cdot 10^{-1}$
8 [511]	$2{,}644\cdot 10^{-2}$	$2{,}001\cdot 10^{-1}$	$4{,}887\cdot 10^{-1}$	$7{,}703\cdot 10^{-1}$
9 [1023]	$2{,}312\cdot 10^{-2}$	$1{,}981\cdot 10^{-1}$	$4{,}885\cdot 10^{-1}$	$7{,}703\cdot 10^{-1}$
10 [2047]	$2{,}076\cdot 10^{-2}$	$1{,}969\cdot 10^{-1}$	$4{,}885\cdot 10^{-1}$	$7{,}703\cdot 10^{-1}$
11 [4095]	$1{,}906\cdot 10^{-2}$	$1{,}962\cdot 10^{-1}$	$4{,}885\cdot 10^{-1}$	$7{,}703\cdot 10^{-1}$

Recordem que totes dues taules representen la probabilitat de guanyar fins a un objectiu, que en l'aposta constant es tracta d'y i en la Martingala es tracta de G_{max}+N.

És veu clarament com els valors de la Martingala són inferiors al de l'aposta constant. Això es dóna perquè les apostes de la Martingala són superiors o iguals a les de l'aposta constant (però únicament iguals després d'haver guanyat una partida). Al ser superiors les apostes, el perill que es corre també és superior, però la rapidesa amb que es guanya és més gran.

Concloent podem dir que si és vol jugar de forma més segura, el millor és fer apostar sempre la mateixa quantitat de diners, però si es vol més rapidesa, es pot fer servir la Martingala, tot i que per la gran diferència de perills no paga la pena corre aquest risc.

8. Conclusions

8.1. Conclusions del treball

Al llarg d'aquest treball de recerca hem anat observant diversos jocs, en els que hem buscat la forma de fer negoci. La nostra hipòtesi inicial queda, doncs, confirmada. Llavors, tot i que no en tots els jocs es confirma, és possible obtenir guanys en alguns casos.

Aquest fet implica que històries com la del clan dels Pelayo, qui van guanyar una fortuna de les ruletes tal i com ja hem explicat, restin, si bé no verificades de tot, tampoc completament invalidades.

Però s'ha d'anar amb molt de compte amb les llegendes, ja que, com hem vist en el treball, la Martingala és un mètode d'apostes que, contradient el mite, és incapaç d'obtenir beneficis quan l'esperança matemàtica és negativa.

Resumint tot el que s'ha dit, les apostes són un tema amb el que s'ha de tractar amb compte si no volem caure en fal·làcies. Bé és possible en alguns casos de guanyar al casino i fer-se ric, però si no es vigila amb els mètodes que es practiquen, és molt probable arribar a la ruïna. I recordem que, tot i seguir les estratègies aquí explicades i tenint l'esperança a favor, mai obtindrem la seguretat de que podem guanyar diners del joc, sinó una probabilitat que variarà amb la nostra paciència.

8.2. Conclusions personals

Aquest treball representa l'esforç de moltes hores, de molts càlculs i de moltes idees creades, desenvolupades i finalment abandonades perquè no tenien cabuda dins del tema. Al llarg d'aquest mig any el tema ha anat canviant i desenvolupant-se. El que en un primer moment seria un treball sobre jocs de casino s'ha generalitzat com un treball sobre les estratègies a seguir en gairebé tots els jocs d'apostes.

El principal agent partícip en les modificacions del tema ha sigut el baix nivell de les eines matemàtiques que hem fet servir, que ha provocat problemes com els que ja hem pogut veure. Demostracions matemàtiques que han sigut substituïdes per unes d'empíriques, fer ús d'aproximacions a la realitat o la troballa d'expressions d'on no es podia extreure conclusions, ja fos per la seva complexitat o per la seva ambigüitat.

Tot i això aquest treball m'ha ajudat molt a complementar els meus "estudis" previs de probabilitats. Crec i espero que amb aquest treball hagi après més coses de les que es descriuen en ell. Per tot això estic satisfet amb el resultat, tot i que sigui millorable.

9. Fonts d'informació

LARSON, Harold J. (1978). *Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística*. Traducció: Sergio Fernández Everest. Mèxic: Limusa

MASOLIVER, Jaume, i Jorge WAGENSBERG (1996). *Introducció a la teoria de la probabilitat i de la informació*. Barcelona: Proa

DOMÈNECH, Josep M. (1977). *Bioestadística. Métodos estadísticos para investigadores.* Barcelona: Grafesa

SAMPIETRO, Pau (2009). *Jugant amb l'atzar i la probabilitat*. [Treball de recerca guardonat amb un premi CIRIT]

Articles de http://www.wikipedia.org/ dels que destaquem els següents: "distribución binomial" i "distribución normal".

Annexos

Sobre les dades de la primitiva

Al estudiar la primitiva vam fer servir les dades proporcionades per un parell de documents que es poden descarregar de la web d'apostes organitzades per l'Estat. En un d'ells s'explica el funcionament de la primitiva de forma detallada. I del segon és d'on vam extreure tots els resultats de la primitiva de l'any 2010, incloent premis atorgats, nombre de premiats. D'aquest últim document va ser d'on vam poder deduir les esperances matemàtiques de cada dia i el capital acumulat.

El tractament d'aquestes dades, però, no va ser senzill. Vam fer servir el l'excel per poder analitzar tots els casos amb més rapidesa. A continuació explicarem el tractament que vam donar a les dades, i els resultats que vam obtenir.

Primer de tot recordem que el que volíem demostrar amb les dades era que quan el pot era nul, llavors l'esperança matemàtica tenia un valor aproximat de –0,45 € per vegada que es juga. I que quan el capital acumulat era molt gran l'esperança podia arribar a ser positiva.

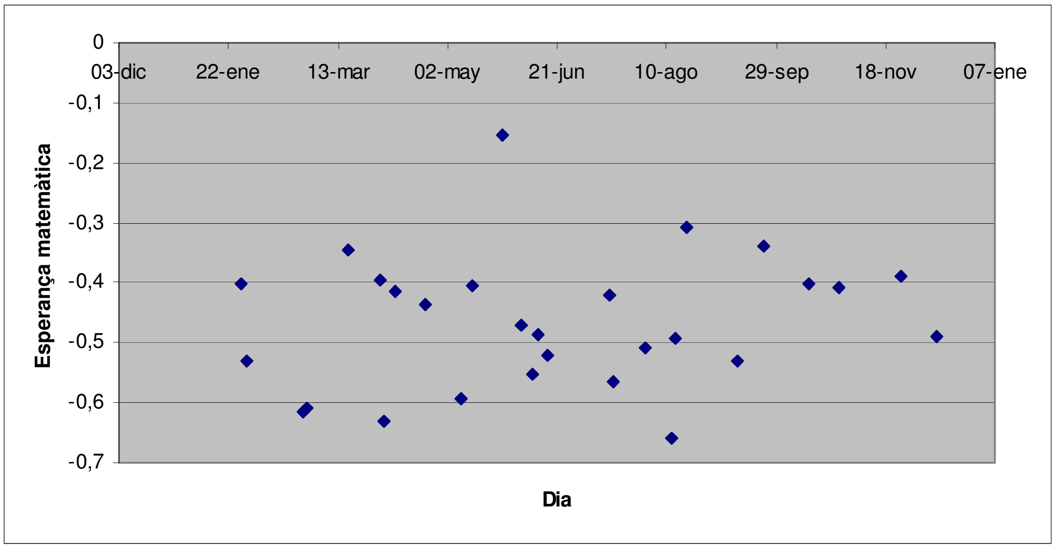
Casos en que el capital acumulat és nul

El que vam fer va per estudiar els casos que no tenien pot va ser seleccionar els dies que semblaven tenir uns premis dins de la moda, i col·locar els premis d'aquells dies en l'excel de forma que cada premi el multiplicàvem per la probabilitat de que sortís, tal i com es mostra en la captura de pantalla:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Dia	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
2	Premi:		(Valor 1r Premi)	(Valor 2r Premi)	(Valor 3r Premi)	(Valor 4r Premi)	8	1	=SUMA(C2:H2)
3	Esperança:		=C2*7,151*10^-8	=D2*4,291*10^-7	=E2*1,802*10^-5	=F2*9,686*10^-4	=G2*1,765*10^-2	=H2*0,09814	=SUMA(C3:H3)-1

El funcionament de les fórmules és ben senzill. Una casella anàloga a cada premi dóna l'esperança parcial de cada premi, i una columna apart suma totes les esperances. També es veu la suma de tots els premis, tot i que no té cap funció. Recordem que la cinquena i sisena categoria tenen premis fixes, i per tant no s'ha d'introduir cap valor.

Un cop tenim totes les esperances, en una columna anàloga agafem tots els valors de les esperances i les dates, i calculem la gràfica que hem vist en l'apartat que tracta la primitiva.



Aquesta és la gràfica valors dia - esperança matemàtica, on es veu que tots els valors ronden pel –0,45.

Per a més seguretat calcularem també el pot (dada que el document no ens proporciona) i observarem que realment en aquests casos dels que hem fet la gràfica no hi ha capital acumulat.

Per a això prendrem les dades del nombre de premiats del primer i segon premi. Així, sent Q_n el percentatge de la recaptació que es dóna com a premi de la categoria *n*-éssima, N_n el nombre de guanyadors de la categoria *n*, P_n el premi rebut per cada un dels premiats de la categoria *n*, *R* la recaptació i *B* el pot, tenim que:

$$\frac{RQ_{5+C}}{N_{5+C}} = P_{5+C}$$

$$\frac{RQ_6 + B}{N_6} = P_6$$

Ja que, com ja hem explicat, el capital acumulat només es dóna en la primera categoria, on s'encerten els 6 números. Com que de les expressions anteriors coneixem totes les dades menys *R* i *B*, aïllem R en una equació i la substituïm en l'altra per obtenir el valor de *B*, el qual serà:

$$B = P_6 N_6 - \frac{Q_6}{Q_{5+C}} P_{5+C} N_{5+c}$$

Si recordem que $Q_6 = 23{,}4\%$ i $Q_6 = 3{,}6\%$, llavors podem expressar-ho com:

$$B = P_6 N_6 - 6{,}5 P_{5+C} N_{5+c}$$

D'aquesta manera, introduint les dades dels premiats de la primera i segona categoria (6 boles encertades i 5 boles més la complementària respectivament) podem calcular el pot de cada categoria. Això, en l'excel, s'expressa com:

K	L	M
Premiats 1ª:	Premiats 2ª:	Bote:
(Nº premiats)	(Nº premiats)	=C2*K2-6,5*D2*L2

On C2 i D2 són primer i segon premi, respectivament.

Tots els resultats van sortir al voltant del 0, excepte en un cas, el dia 13 de maig, quan van haver-hi 143 premiats en la segona categoria, fet que va fer que la segona categoria necessités una subvenció per part de l'Estat per tal de poder donar uns premis raonables als guanyadors. (Si s'hagués repartit el premi tal i com es fa sempre el resultat hauria sigut que els guanyadors de la tercera categoria haurien obtingut uns beneficis superior als de la segona).

Casos en que el capital acumulat és molt gran

El segon cas que volíem estudiar era que quan el capital acumulat era molt gran l'esperança podia ser positiva. Per a això vam fer el mateix procediment que en els casos anterior, però al només trobar 5 dies en tot l'any en que hagués hagut esperança positiva, vam concluir que qualsevol conclusió extreta seria precipitada i per tant, l'estudi estadístic va reduir-se al fet que només hi haguessin hagut 5 dies on es podria haver fet benefici.

Full d'excel que tracta les dades de la primitiva

A continuació es veuen totes les dades en l'excel que ja hem explicat:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	28-ene	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
2	Premi:		2.802.460,15	61.592,53	2.382,03	90,6	8	1	2.866.534,31
3	Esperança:		0,200403925	0,02642935	0,04292418	0,08775516	0,1412	0,09814	-0,40314738
4									
5	30-ene	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
6	Premi:		1.308.204,35	33.543,70	2.692,47	77,68	8	1	1.344.527,20
7	Esperança:		0,093549693	0,0143936	0,04851831	0,07524085	0,1412	0,09814	-0,52895755
8									
9	25-feb	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
10	Premi:		595.323,63	91.588,25	1.752,89	33,58	8	1	688.707,35
11	Esperança:		0,042571593	0,03930052	0,03158708	0,03252559	0,1412	0,09814	-0,61467522
12									
13	27-feb	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
14	Premi:		1.072.628,70	41.254,95	1.080,33	38,57	8	1	1.115.011,55
15	Esperança:		0,076703678	0,0177025	0,01946755	0,0373589	0,1412	0,09814	-0,60942737
16									
17	18-mar	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
18	Premi:		2.923.180,44	112.430,02	3.555,10	97,3	8	1	3.039.271,86
19	Esperança:		0,209036633	0,04824372	0,0640629	0,09424478	0,1412	0,09814	-0,34507196
20									
21	01-abr	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
22	Premi:		2.574.482,90	132.024,76	2.640,50	80,73	8	1	2.709.237,89
23	Esperança:		0,184101272	0,05665182	0,04758181	0,07819508	0,1412	0,09814	-0,39413002
24									
25	03-abr	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
26	Premi:		338.375,19	20.244,67	1.959,16	63,11	8	1	360.651,13
27	Esperança:		0,02419721	0,00868699	0,03530406	0,06112835	0,1412	0,09814	-0,63134339

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
29	08-abr	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
30	Premi:		2.730.426,24	46.673,95	2.456,52	91,02	8	1	2.779.656,73
31	Esperança:		0,19525278	0,02002779	0,04426649	0,08816197	0,1412	0,09814	-0,41295097
32									
33	22-abr	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
34	Premi:		2.551.081,00	43.608,22	2.918,02	71,6	8	1	2.597.687,84
35	Esperança:		0,182427802	0,01871229	0,05258272	0,06935176	0,1412	0,09814	-0,43758543
36									
37	08-may	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
38	Premi:		1.143.451,55	23.455,42	1.606,54	48,35	8	1	1.168.570,86
39	Esperança:		0,08176822	0,01006472	0,02894985	0,04683181	0,1412	0,09814	-0,5930454
40									
41	13-may	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
42	Premi:		2.755.707,97	3.437,47	3.437,47	97,62	8	1	2.762.689,53
43	Esperança:		0,197060677	0,00147502	0,06194321	0,09455473	0,1412	0,09814	-0,40562636
44									
45	27-may	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
46	Premi:		2.835.328,55	436.204,39	5.702,02	116,57	8	1	3.277.360,53
47	Esperança:		0,202754345	0,1871753	0,1027504	0,1129097	0,1412	0,09814	-0,15507025
48									
49	05-jun	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
50	Premi:		1.326.035,71	68.001,83	3.942,14	98,42	8	1	1.398.087,10
51	Esperança:		0,094824814	0,02917959	0,07103736	0,09532961	0,1412	0,09814	-0,47028863
52									
53	10-jun	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
54	Premi:		1.246.608,83	95.892,99	1.365,02	55,58	8	1	1.343.931,42
55	Esperança:		0,089144997	0,04114768	0,02459766	0,05383479	0,1412	0,09814	-0,55193487

A57 = 12/06/2011

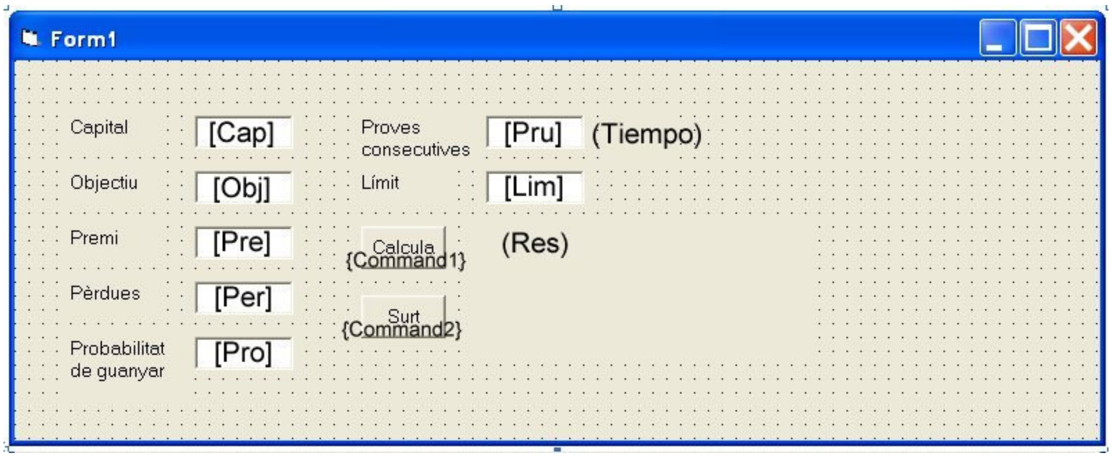
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
57	12-jun	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
58	Premi:		2.346.200,32	45.119,24	1.994,22	52,96	8	1	2.393.375,74
59	Esperança:		0,167776785	0,01936067	0,03593584	0,05129706	0,1412	0,09814	-0,48628965
60									
61	17-jun	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
62	Premi:		850.113,87	130.786,75	2.715,30	75,07	8	1	983.699,99
63	Esperança:		0,060791643	0,05612059	0,04892971	0,0727128	0,1412	0,09814	-0,52210525
64									
65	15-jul	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
66	Premi:		2.577.786,15	56.654,64	2.763,64	83,37	8	1	2.637.296,80
67	Esperança:		0,184337488	0,02431051	0,04980079	0,08075218	0,1412	0,09814	-0,42145903
68									
69	17-jul	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
70	Premi:		612.544,80	53.850,09	2.899,62	77,64	8	1	669.381,15
71	Esperança:		0,043803079	0,02310707	0,05225115	0,0752021	0,1412	0,09814	-0,56629659
72									
73	31-jul	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
74	Premi:		2.175.627,27	33.471,19	1.814,16	52,29	8	1	2.210.973,91
75	Esperança:		0,155579106	0,01436249	0,03269116	0,05064809	0,1412	0,09814	-0,50737915
76									
77	12-ago	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
78	Premi:		419.739,31	20.179,78	1.195,84	42,85	8	1	441.166,78
79	Esperança:		0,030015558	0,00865914	0,02154904	0,04150451	0,1412	0,09814	-0,65893175
80									
81	14-ago	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
82	Premi:		1.254.813,97	48.262,08	3.608,38	96,57	8	1	1.306.790,00
83	Esperança:		0,089731747	0,02070926	0,06502301	0,0935377	0,1412	0,09814	-0,49165828

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
85	19-ago	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
86	Premi:		2.338.469,33	359.764,51	3.035,99	77,85	8	1	2.701.356,68
87	Esperança:		0,167223942	0,15437495	0,05470854	0,07540551	0,1412	0,09814	-0,30894706
88									
89	11-sep	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
90	Premi:		1.229.305,25	34.386,16	2.990,10	75,87	8	1	1.266.766,38
91	Esperança:		0,087907618	0,0147551	0,0538816	0,07348768	0,1412	0,09814	-0,530628
92									
93	23-sep	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
94	Premi:		2.756.034,14	70.667,54	4.737,49	112,67	8	1	2.831.560,84
95	Esperança:		0,197084001	0,03032344	0,08536957	0,10913216	0,1412	0,09814	-0,33875083
96									
97	14-oct	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
98	Premi:		1.404.744,68	216.114,57	4.322,29	89,9	8	1	1.625.280,44
99	Esperança:		0,100453292	0,09273476	0,07788767	0,08707714	0,1412	0,09814	-0,40250714
100									
101	28-oct	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
102	Premi:		2.703.084,90	59.408,46	2.918,31	83,36	8	1	2.765.504,03
103	Esperança:		0,193297601	0,02549217	0,05258795	0,0807425	0,1412	0,09814	-0,40853979
104									
105	25-nov	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
106	Premi:		2.733.383,82	52.565,07	3.324,27	97,02	8	1	2.789.379,18
107	Esperança:		0,195464277	0,02255567	0,05990335	0,09397357	0,1412	0,09814	-0,38876313
108									
109	11-dic	Categoria:	1ª (6)	2ª (5+C)	3ª (5)	4ª (4)	5ª (3)	6ª (R)	Total:
110	Premi:		2.423.253,87	23.300,52	1.694,58	58,32	8	1	2.448.316,29
111	Esperança:		0,173286884	0,00999825	0,03053633	0,05648875	0,1412	0,09814	-0,49034978

Sobre el programa utilitzat en l'apartat de la ruleta

En l'apartat de l'estudi de la ruleta hem fet servir un programa informàtic per a quantificar de forma estadística les freqüències amb que guanyàvem al casino. Ara mostrarem les parts del programa. El projecte "Basic" i l'executable es troben adjunts al treball.

La finestra que vam definir gràficament va ser la següent:



On els objectes amb el nom entre parèntesis són del tipus "Label", quan el nom està entre claudàtors són del tipus "TextBox" i els que estan entre claus indiquen que l'objecte és del tipus "CommandButton".

El codi font del programa era el següent:

```
Private Sub Command1_Click()


Dim N As Double
Dim CGan As Double
Dim CLim As Double
Dim Din As Double
Dim Sal As Double
Dim Respuesta
```

```
If Val(Cap.Text) >= 0 And Val(Cap.Text) <= Val(Obj.Text) And Val(Obj.Text) >= 0
And Val(Pro.Text) >= 0 And Val(Pro.Text) <= 1 And Val(Pre.Text) >= 0 And
Val(Per.Text) >= 0 Then

    N = 0
    CGan = 0
    Sal = 0
    Tiempo.Caption = ""
    Res.Caption = ""
    Form1.Refresh

    Do While N < Val(Pru.Text) And Sal = 0

        CLim = 0
        Din = Val(Cap.Text)

        Do While Din > 0 And Din < Val(Obj.Text) And Sal = 0

            Randomize

            If Rnd < Val(Pro.Text) Then
                Din = Din + Val(Pre.Text)
            Else
                Din = Din - Val(Per.Text)
            End If

            CLim = CLim + 1

            If CLim >= Val(Lim.Text) Then
                Respuesta = MsgBox("Sobrepassat límit de proves. Seguir provant?",
vbYesNo, "Error")
                If Respuesta = vbNo Then
                    Sal = 1
```

```
            Else
               CLim = 0
            End If
         End If

      Loop

      If Din >= Val(Obj.Text) And Sal = 0 Then
         CGan = CGan + 1
      End If

      If Sal = 0 Then
         N = N + 1
         If N = Val(Pru.Text) Then
            Tiempo.Caption = "100%"
         Else
            If 100 * N / Val(Pru.Text) - Val(Tiempo.Caption) > 1 Then
               Tiempo.Caption = CStr(CLng(100 * N / Val(Pru.Text))) + "%"
               Form1.Refresh
            End If
         End If
      End If
   Loop

   If N > 0 Then
      MsgBox CStr(CGan) + " de " + CStr(N) + vbNewLine + "Probabilitat = " +
CStr(CGan / N * 100) + "%"
   End If

   If N > 0 Then
      Res.Caption = CStr(CGan) + " de " + CStr(N) + vbNewLine + "Probabilitat = " +
CStr(CGan / N * 100) + "%"
   End If
```

```
Else

    MsgBox "Algun valor està mal definit"

End If

End Sub

Private Sub Command2_Click()
End
End Sub
```

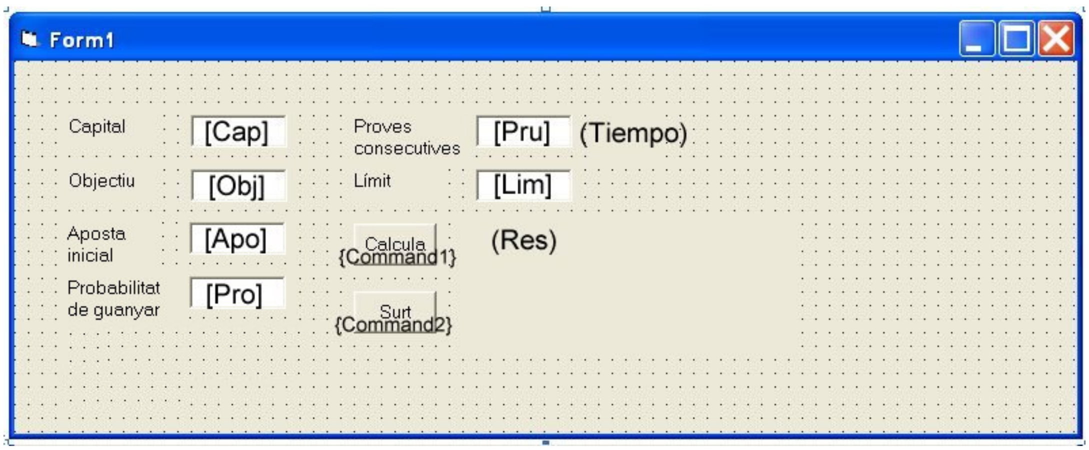
El diagrama de flux del programa ja està explicat en el seu apartat corresponent. Les úniques variacions entre l'esquema general que ja havíem vist i el codi font són tots els condicionals i els comptadors de seguretat, col·locats per tal d'evitar que l'executable entri dins d'un bucle infinit, i el càlcul de la fracció de proves que s'han realitzat.

Sobre el programa utilitzat en l'apartat de la Martingala

En l'apartat de la Martingala hem fet servir un programa informàtic per a quantificar de forma estadística les freqüències amb que guanyàvem. Ara mostrarem les parts del programa. El projecte "Basic" i l'executable es troben adjunts al treball.

És notable el fet que haguem fet aquest programa a partir de que simulava les apostes contínues. Les petites diferències que s'hi troben és el que marca la diferència en les apostes.

La finestra que vam definir gràficament va ser la següent:



On els objectes amb el nom entre parèntesis són del tipus "Label", quan el nom està entre claudàtors són del tipus "TextBox" i els que estan entre claus indiquen que l'objecte és del tipus "CommandButton".

El codi font del programa era el següent. Aquí es fan servir els mateixos noms que el la finestra gràfica:

```
Private Sub Command1_Click()


Dim N As Double
Dim CGan As Double
Dim CLim As Double
```

```
Dim Din As Double
Dim Sal As Double
Dim Respuesta
Dim Apuesta As Double

If Val(Cap.Text) >= 0 And Val(Cap.Text) <= Val(Obj.Text) And Val(Obj.Text) >= 0
And Val(Pro.Text) >= 0 And Val(Pro.Text) <= 1 And Val(Apo.Text) > 0 Then

   N = 0
   CGan = 0
   Sal = 0
   Tiempo.Caption = ""
   Res.Caption = ""
   Form1.Refresh

   Do While N < Val(Pru.Text) And Sal = 0

      CLim = 0
      Din = Val(Cap.Text)
      Apuesta = Val(Apo.Text)

      Do While Din > 0 And Din < Val(Obj.Text) And Sal = 0 And Apuesta <= Din

         Randomize

         If Rnd < Val(Pro.Text) Then

            Din = Din + Apuesta
            Apuesta = Val(Apo.Text)

         Else

            Din = Din - Apuesta
```

```
        Apuesta = 2 * Apuesta

      End If

      CLim = CLim + 1

      If CLim >= Val(Lim.Text) Then
        Respuesta = MsgBox("Sobrepassat límit de proves. Seguir provant?",
vbYesNo, "Error")
        If Respuesta = vbNo Then
          Sal = 1
        Else
          CLim = 0
        End If
      End If

    Loop

    If Din >= Val(Obj.Text) And Sal = 0 Then
      CGan = CGan + 1
    End If

    If Sal = 0 Then
      N = N + 1
      If N = Val(Pru.Text) Then
        Tiempo.Caption = "100%"
      Else
        If 100 * N / Val(Pru.Text) - Val(Tiempo.Caption) > 1 Then
          Tiempo.Caption = CStr(CLng(100 * N / Val(Pru.Text))) + "%"
          Form1.Refresh
        End If
      End If
    End If
```

```
   Loop

If N > 0 Then
   MsgBox CStr(CGan) + " de " + CStr(N) + vbNewLine + "Probabilitat = " +
CStr(CGan / N * 100) + "%"
End If

If N > 0 Then
   Res.Caption = CStr(CGan) + " de " + CStr(N) + vbNewLine + "Probabilitat = " +
CStr(CGan / N * 100) + "%"
End If

Else

   MsgBox "Algun valor està mal definit"

End If

End Sub

Private Sub Command2_Click()
End
End Sub
```

El diagrama de flux del programa ja està explicat en el seu apartat corresponent. Les úniques variacions entre l'esquema general que ja havíem vist i el codi font són tots els condicionals i els comptadors de seguretat, col·locats per tal d'evitar que l'executable entri dins d'un bucle infinit. També s'ha introduït unes instruccions que permeten calcular el percentatge de proves que s'han realitzat fins al moment.

Guia de les variables fetes servir al llarg del treball

A continuació exposarem totes les variables que s'han definit al llarg del treball com a ajuda a la lectura.

Capítol 2. Probabilitat

Variable	**Significat**
a	Un resultat qualsevol d'una experiència qualsevol.
A	Nombre de vegades que apareix el resultat *a.*
N	Nombre total de vegades que realitzem una experiència.
f_a	Freqüència relativa amb que apareix el resultat *a.*
n_a	Resultats favorables a *a.*
n/Ω	Nombre de resultats total.
$P(a)$	Probabilitat de que resulti *a.*
B	Un resultat qualsevol d'una experiència qualsevol.
C	$C = \bigcup_i B_i$

Capítol 3. Esperança matemàtica

Variable	**Significat**
X, Y	Una experiència qualsevol.
$X_1, X_2, ..., X_n$	Tots els resultats possibles de l'experiència *X.*
$A_1, A_2, ..., A_n$	Nombre de vegades en que es donen els resultats $X_1, X_2, ..., X_n$ respectivament.
N	Nombre total de vegades que realitzem l'experiència *X.*
$\overline{X}$	Mitjana aritmètica dels resultats estadístics de l'experiència *X.*
A_a	Nombre de vegades que apareix el resultat *a.*
f_a	Freqüència relativa amb que apareix el resultat *a.*
n_a	Resultats favorables a *a.*
n/Ω	Nombre de resultats total.

Capítol 4. La primitiva

Variable	**Significat**
PM_n	Premi mitjà de la categoria *n.*
P_n	Probabilitat d'obtenir el premi de la categoria *n.*
N	Total de participants.
Q_n	Percentatge de la recaptació dedicat a la categoria *n.*
C_n	Premi de la categoria *n.*
$E_T, E_{\Pr emis}, E_{Cost}$	Esperança total, esperança parcial de cada premi, i cost de participació, respectivament.
B	Pot.
$N(B)$	Funció de la participació amb dependència indicada pel pot.

Capítol 5. La ruleta

Apartats 5.1 i 5.2

Variable	**Significat**
c	Nombre de caselles on s'ha apostat.
A	Quantitat de diners apostada.
P	Premi.
E_1, E_2, E_T	Cost de participació, esperança al jugar, esperança total, respectivament.
$p_1, p_2, \ldots p_c$	Probabilitat de que surti la casella 1, 2, ..., *c*, respectivament.

Apartats 5.3 fins al final

Variable	**Significat**
f	Probabilitat de perdre tot el capital abans d'arribar a un objectiu.
x	Capital disponible.
y	Capital objectiu.
b	Benefici que obtenim al guanyar una partida.
c	Pèrdues que patim al perdre una partida.
q	Probabilitat de guanyar una partida.
A	Esdeveniment "arruïnar-se" quan es fa servir la teoria d'esdeveniments. Variable desconeguda d'una funció quan es defineix el model d'aposta constant.
G	Esdeveniment “guanyar una partida”.
P	Esdeveniment “perdre una partida”.
p(n)	Probabilitat de que ocorri l'esdeveniment *n.*
$g(B)$	$g(B) = qB^{b+c} - B^{c} + 1 - q$.
$g'(B)$	Derivada de la funció $g(B)$ respecte *B.*
B_{est}	Punt estacionari de la funció $g(B)$.
E	Esperança al jugar una partida de la ruleta.
$P_{y=\infty}$	Probabilitat de perdre tot el capital disponible quan l'objectiu és infinit.
$P_{g,y}, P_{g.il.}$	Probabilitat de guanyar fins a un objectiu *y*, i probabilitat de guanyar il·limitadament, respectivament.

Capítol 6. La Martingala

Variable	**Significat**
n	Nombre d'apostes a l'apartat teòric. A l'apartat estadístic és una variable amb valor natural que compleix que $G_{\max} = 2^{n+1} - 2$.
a	Probabilitat de guanyar una partida
N	Capital inicial.
G	Nombre de guanys que es tenen des de l'última vegada que s'ha guanyat.
G_{max}	Nombre de guanys objectiu.
E(x)	Funció del valor enter. Torna la part no decimal d'*x*.
$P, P_G, P_f,$ $P_{G_{\max} \to \infty}$	Probabilitat de guanyar com a mínim 1 d'*n* apostes, probabilitat de guanyar una vegada abans d'arruïnar-se, probabilitat de guanyar fins a arribar a un capital objectiu, i probabilitat de guanyar il·limitadament.
$f(x)$	$f(x) = 1 - (1-a)^{E(\log_2 x)}$
k	L'únic valor natural que compleix que $2^k \leq x < 2^{k+1}$.
Esp	Esperança al jugar una partida.
$g(k)$	$g(k) = 2^k \ln\left[1 - (1-a)^k\right]$

7. Comparació de les estratègies de l'aposta constant i la Martingala

Variable	**Significat**
y	Capital objectiu.
b	Benefici que obtenim al guanyar una partida.
c	Pèrdues que patim al perdre una partida.
q	Probabilitat de guanyar una partida.
n	Variable amb valor natural que compleix que $G_{\max} = 2^{n+1} - 2$.
a	Probabilitat de guanyar una partida
N	Capital inicial.
G_{max}	Nombre de guanys objectiu.

Memòria del treball

3 de juliol de 2010: primer contacte amb el tutor; es deixa marcat el tema i un índex inicial. Comença la recerca d'informació, que durarà tot l'estiu.

14 de setembre de 2010: primera reunió amb el tutor. Es mostra un estudi matemàtic de la Martingala i el Pòquer, i una fulla de càlcul que simula partides que segueixen l'estratègia de la Martingala. A partir d'aquest dia les reunions amb el tutor cauran en tots els dimarts fins a final de trimestre.

20 de setembre de 2010: envio un missatge al tutor amb un document de 9 pàgines de teoria de les probabilitats, amb alguns punts per desenvolupar. D'aquí es decideix més tard quina informació entrarà dins del treball, i quina, per la seva falta d'ús dins de la part pràctica, no s'inclourà.

18 d'octubre de 2010: primera versió del programa informàtic que més tard ha de calcular de forma estadística la freqüència amb que es guanya a la ruleta.

6 i 7 de novembre de 2010: es troba solució al problema del model teòric de l'aposta constant. Aquest punt és important ja que, com ja s'ha explicat en el treball, el sistema que s'ha de resoldre únicament es podia solucionar provant amb diferents models, i per tant, cabia la possibilitat de no trobar mai la resposta.

22 de desembre de 2010: envio al tutor la part teòrica del treball tal i com ja s'exposa en aquest mateix, i també de la ruleta. El que resta fer durant el Nadal és la transcripció a "word" dels càlculs i raonaments.

En la memòria només s'han exposat els punts importants de la construcció del treball. Com ja s'ha explicat les reunions eren periòdiques, i en gairebé totes elles s'ha aportat matèria nova.